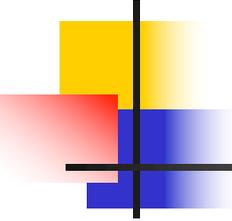


自由曲面刀路规划的现状与新进展

袁春明

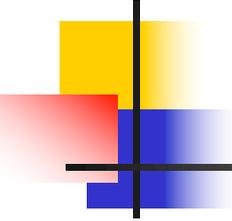
中科院数学机械化重点实验室

2022.11.24



汇报内容

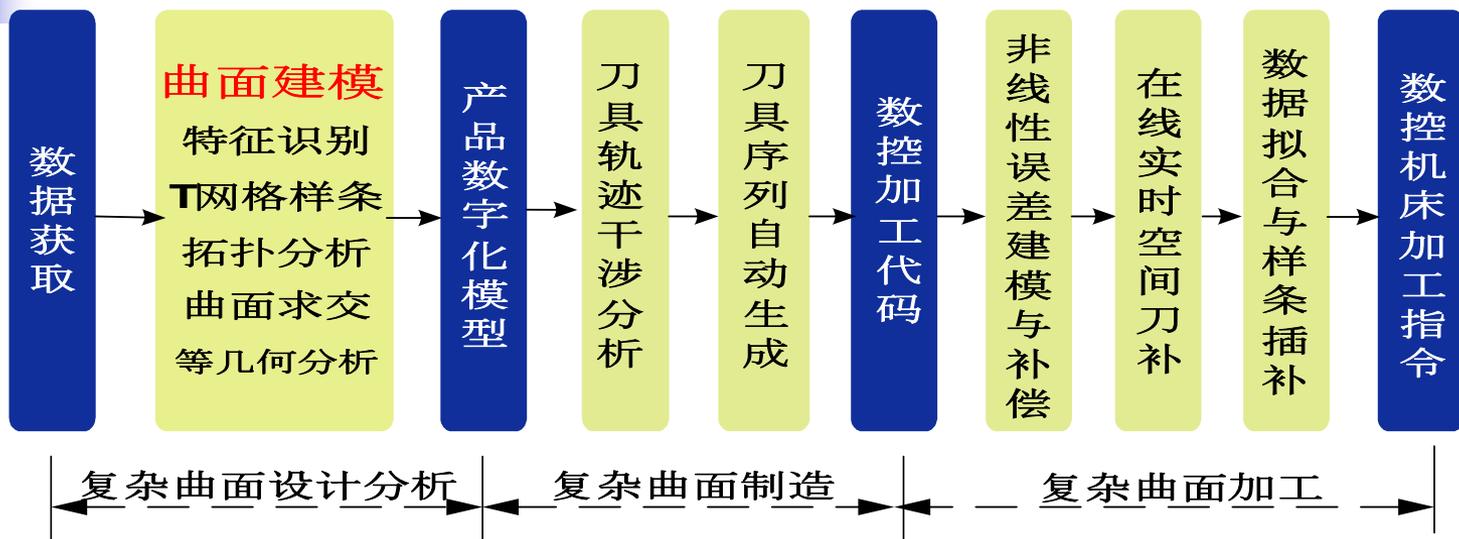
- 自由曲面刀路规划的现状
- 一些新进展
- 未来展望



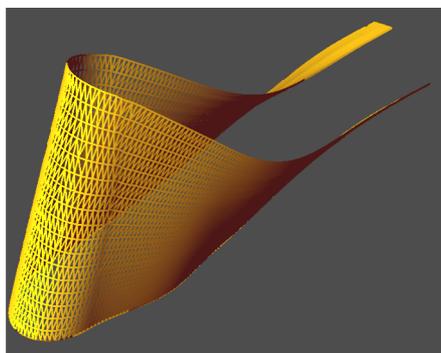
汇报内容

- 自由曲面刀路规划的现状
- 一些新进展
- 未来展望

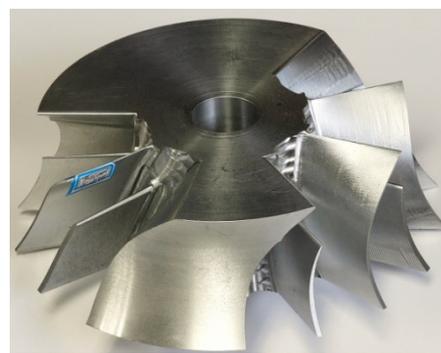
数字化设计制造



叶轮设计图



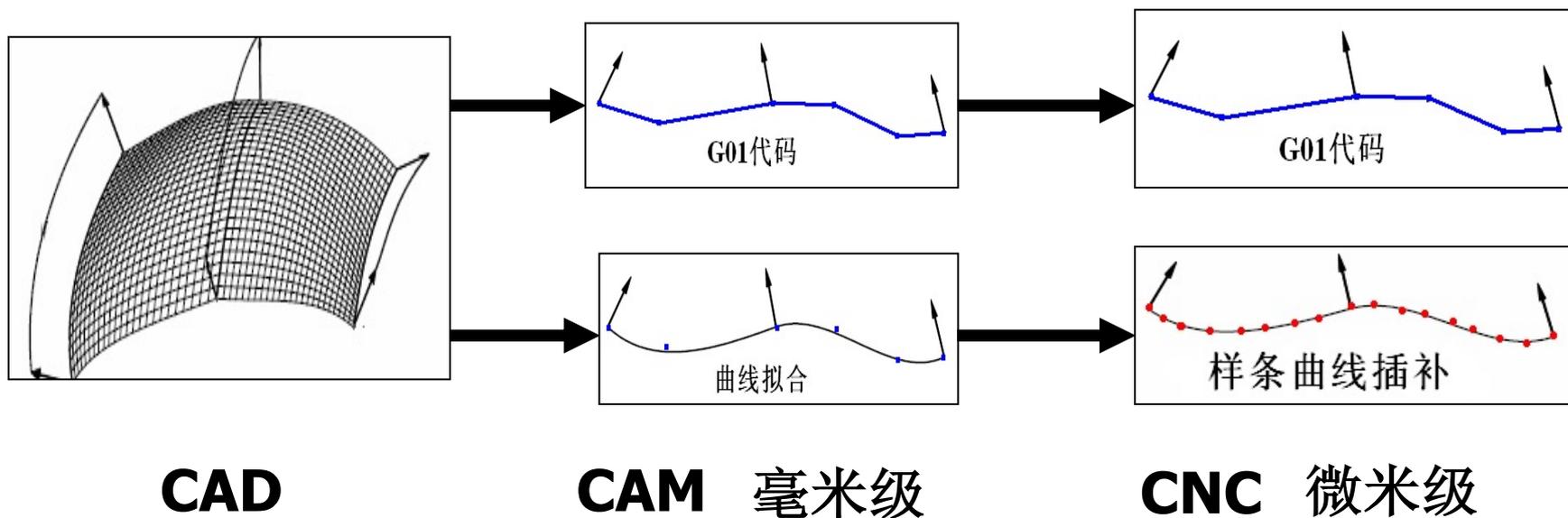
叶片加工代码

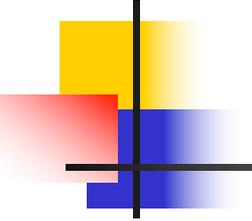


加工的叶轮

一：自由曲面数控加工的问题

- 自由曲面的设计与分析
- 刀具路径规划
- 数控系统的运动插补





数控路径规划中的基本问题和方法

刀触点路径规划的目标（三维）：

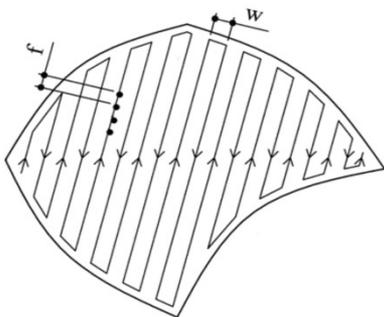
生成光滑的路径, 并且保证残高满足要求

传统方法：

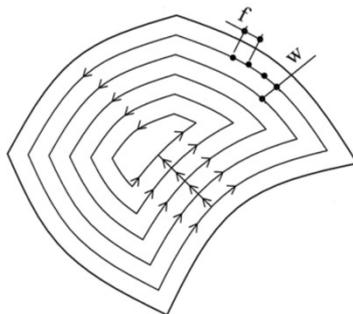
- 拓扑方法: 平行方向法, 平行轮廓法, 空间填充曲线法
- 参数方法: 等参数法, 截平面法, 等残高法
- 其他方法: 向量场法, 区域分割法……

拓扑方法

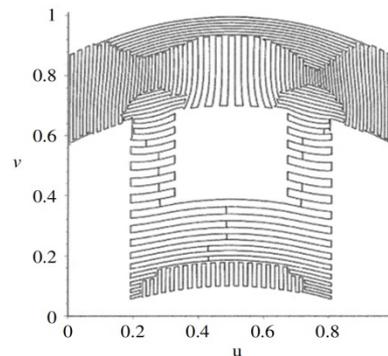
- 方向平行轨迹：所有路径与预先设定的某条直线（轮廓线）平行。所有轨迹首尾相连形成 zigzag 轨迹
- 螺旋轨迹：基于曲面边界轮廓构造，每条路径都是曲面边界的偏置曲线，连续性好
- 空间填充曲线轨迹：连续性较好，但是由于轨迹计算比较复杂，轨迹方向变化频繁，所以并不常用



(1)方向平行



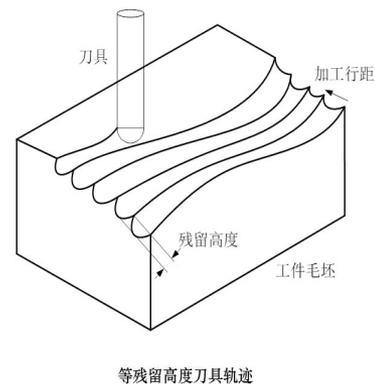
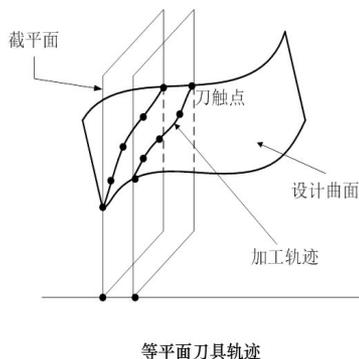
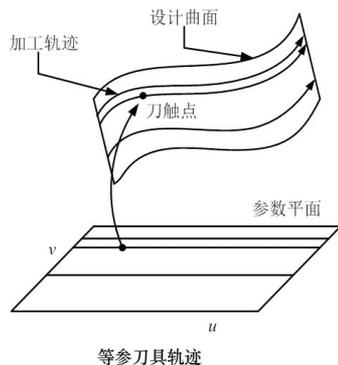
(2)螺旋轨迹



(3)空间填充

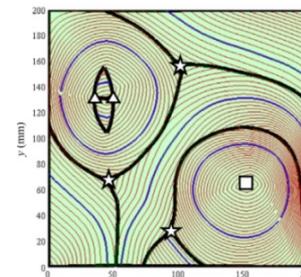
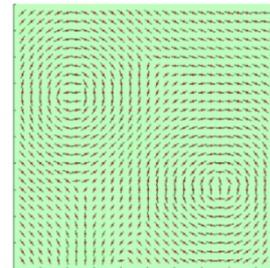
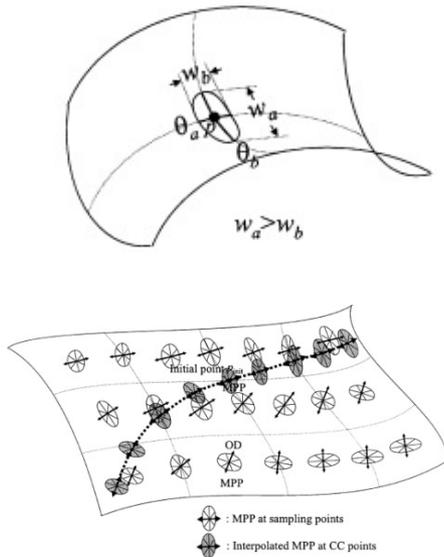
参数方法

- 参数形式主要应用于参数曲面 $S(u,v)$ 。有以下三种类型：等参数法；截平面法；等残高法
- 等参数法和截平面法，虽然生成的路径比较光滑，但是残留高度分布不一致；等残高方法计算和控制较难。



向量场法

- 向量场法是在每个离散刀位点处考虑最优加工方向，进而以加工带宽最大化为目标进行路径规划
- 通过整体向量场的分布进行区域分割和路径规划

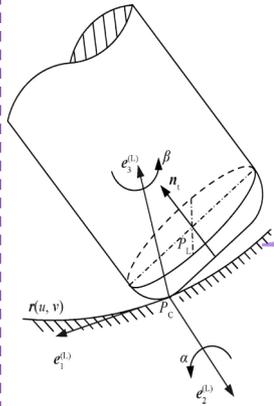


五轴加工刀具姿态光顺

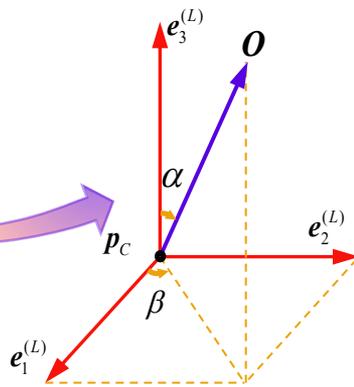
五轴数控刀具姿态表示

工件坐标系 (X, Y, Z, O_i, O_j, O_k) 或局部坐标 (X, Y, Z, α, β)
 机床坐标系MCS (X, Y, Z, A, C)

✘ 刀具定位

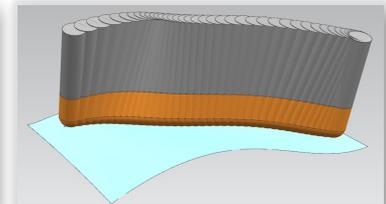


✘ 局部坐标系



$e_1^{(L)}$:进给方向 $e_3^{(L)}$:曲面法矢量 $e_2^{(L)}$:行距方向 $e_2^{(L)} = e_3^{(L)} \times e_1^{(L)}$
 P_c :刀具切触点 α, β :前倾角、侧倾角

最简单的刀具定位方法——**Sturz法 (施图茨法)**: 将刀具相对于工件曲面切触点处的法向倾斜一个固定角度 φ 来确定刀位。该方法目前在NX CAM等软件中广泛集成。



✘ NX CAM刀轴指定模块

Tip: 研究中, 常称 α 为前倾角, β 为侧倾角。

NX中则将 α 称为前倾角, 将绕进给方向的角度 γ 定义为侧偏角

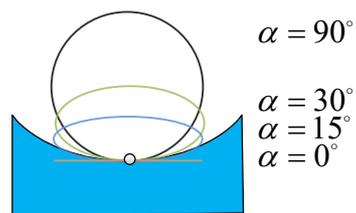
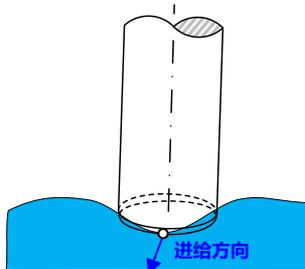
五轴加工刀具姿态光顺

局部干涉和全局碰撞干涉避免

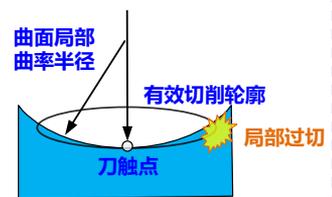
局部干涉

刀触点处由于刀具的有效切削半径与被加工曲面在垂直于进给方向的局部曲率半径不匹配，所引发的加工过切现象。

调整方式：调整 α 、 β 值，改变刀具的有效切削半径



刀具的有效切削半径

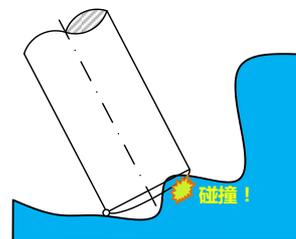
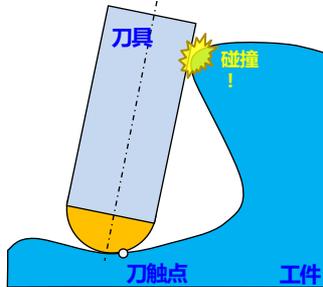


局部干涉现象

全局干涉

除了刀触点外，刀具同被加工曲面间或机床夹持、检测设备之间的碰撞干涉。

包含两种情形：即刀具底面和刀杆部分与被加工曲面之间的碰撞。



刀具底面与工件的碰撞



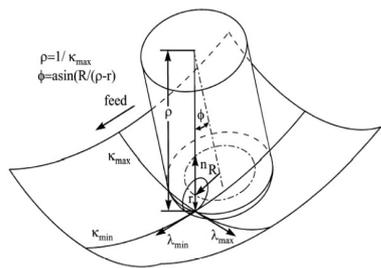
刀杆与工件的碰撞

五轴加工刀具姿态光顺

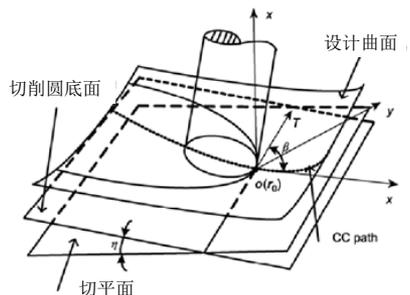
避免局部干涉与增大加工带宽

在避免加工干涉的同时进一步增大加工带宽，先后提出了用以消除局部加工干涉的曲率匹配法、多点接触法、弧交法、滚球法等，据此实现更优的刀具姿态。

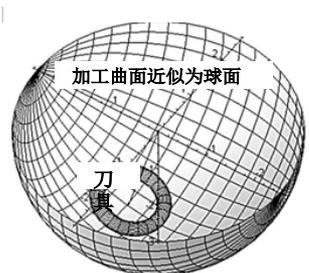
✘ 主曲率匹配定位



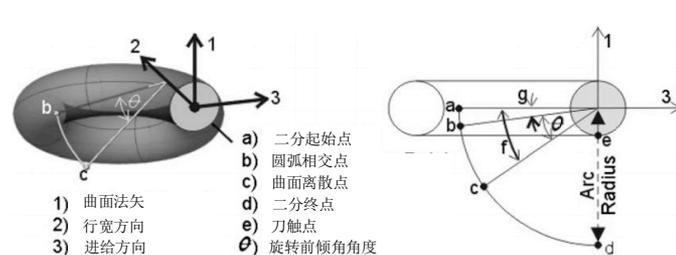
✘ 密切定位



✘ 滚球法定位



✘ 弧交法定位



➢ 充分利用曲面在法截面内的曲率信息，刀具和曲面的贴合程度较高

➢ 研究刀具包络面与设计曲面在切触点处的二阶、三阶匹配条件和方法，提高加工带宽

➢ 在局部采用球面来逼近加工曲面，实现刀具和球面的多点接触

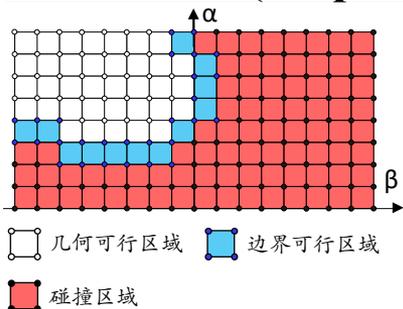
➢ 通过调整前倾角在消除干涉的同时搜索刀具和曲面的第二接触点。计算效率和精度优于滚球法

五轴加工刀具姿态光顺

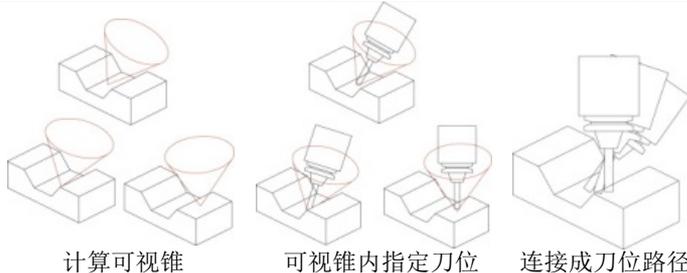
C空间方法：全局碰撞干涉的消除

构型空间(C-space)法、基于可视锥的碰撞消除法、以及基于物理引力场的无干涉刀具姿态确定方法等，用于在几何层面上检测和消除全局干涉。

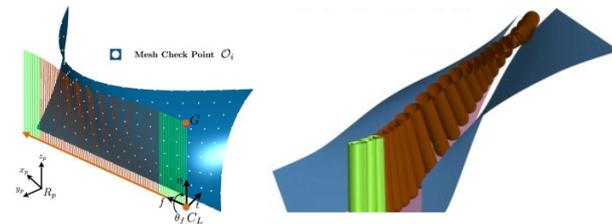
✘ 构型空间(C-space)法



✘ 基于可视锥的碰撞消除



✘ 基于物理引力场的碰撞消除



➤ 理论简单，易于实现，缺点在于计算速度取决于实际中障碍物的复杂程度

➤ 对于非圆柱刀具，可视并不意味着可行；实际规划过程中，可视锥的构建计算代价大

➤ 基于虚拟力场的碰撞消除法更适用于具备腔体特征的工件，能有效消除干涉，但生成刀位光顺性有待提高

五轴加工刀具姿态光顺

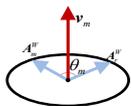
WCS下刀具姿态四元数插值法

考虑刀具姿态变化，估算姿态变化引入的非线性误差，据此确定刀触点及初始刀具姿态；在干涉区域指定无干涉关键刀轴，利用球面四元数插值确定其他刀触点处的刀具姿态；通过干涉检查和四元数插值的反复迭代，确定最终刀具姿态。

为实现刀轴光顺，研究人员采用四元数插值法进行刀具定位。
具体步骤：指定关键刀轴矢量、球面线性插值、干涉检测及消除

1 指定关键刀轴矢量

- 在关键区域刀触点处指定关键刀轴矢量
- 关键刀矢转换为四元数形式



刀轴矢量转换为四元数

2 球面线性插值

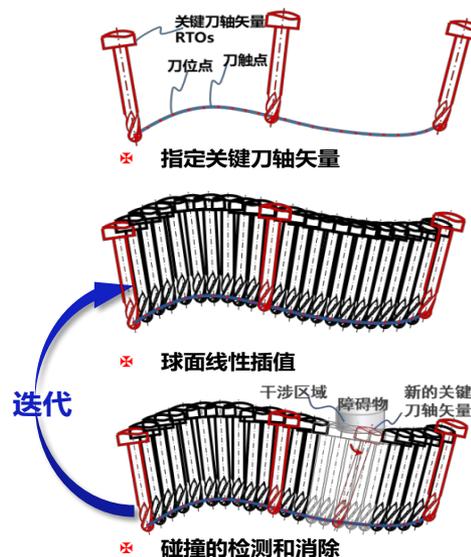
$$slerp(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, t) = \frac{\sin(1-t)}{\sin \omega} \mathbf{q}_0 + \frac{\sin t}{\sin \omega} \mathbf{q}_1$$

球面线性插值公式

3 碰撞的检测及消除

- 在干涉区域内，选取新的代表刀轴
- 代表刀轴加入关键刀矢序列，迭代进行球面插值

四元数插值方法的具体步骤



五轴加工刀具姿态光顺

WCS构型空间 (C-空间) 方法

构造干涉约束下的 (α, β) 的可行空间, 通过每个刀触点可行边界向前向后搜索得到刀具姿态变化路径, 选择其中刀姿角度变化最小的路径作为最终的光顺刀姿。

基于满足残高要求及加工干涉的可行空间, 搜索产生刀轴矢量角度变化总和最小的刀轴位向

1 构建可行空间

在 $\alpha - \beta$ 平面上构造满足残留高度要求及加工干涉约束的可行域

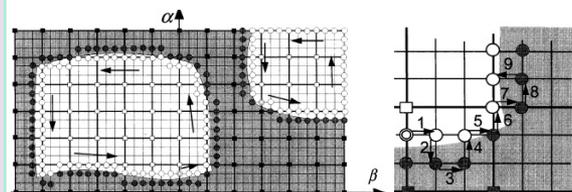
2 前向及后向搜索

通过前向及后向搜索从所有刀触点可行域边界确定2条路径

3 产生光顺的刀轴矢量

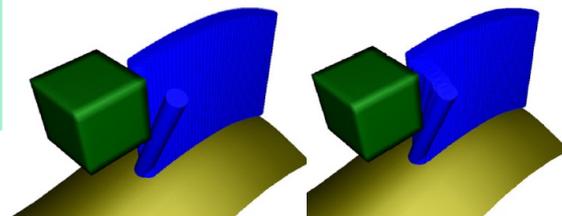
其中刀轴矢量角度变化总和最小的路径被用于产生光顺的刀轴矢量

可行空间内搜索最优刀轴位向



可行空间

可行空间边界

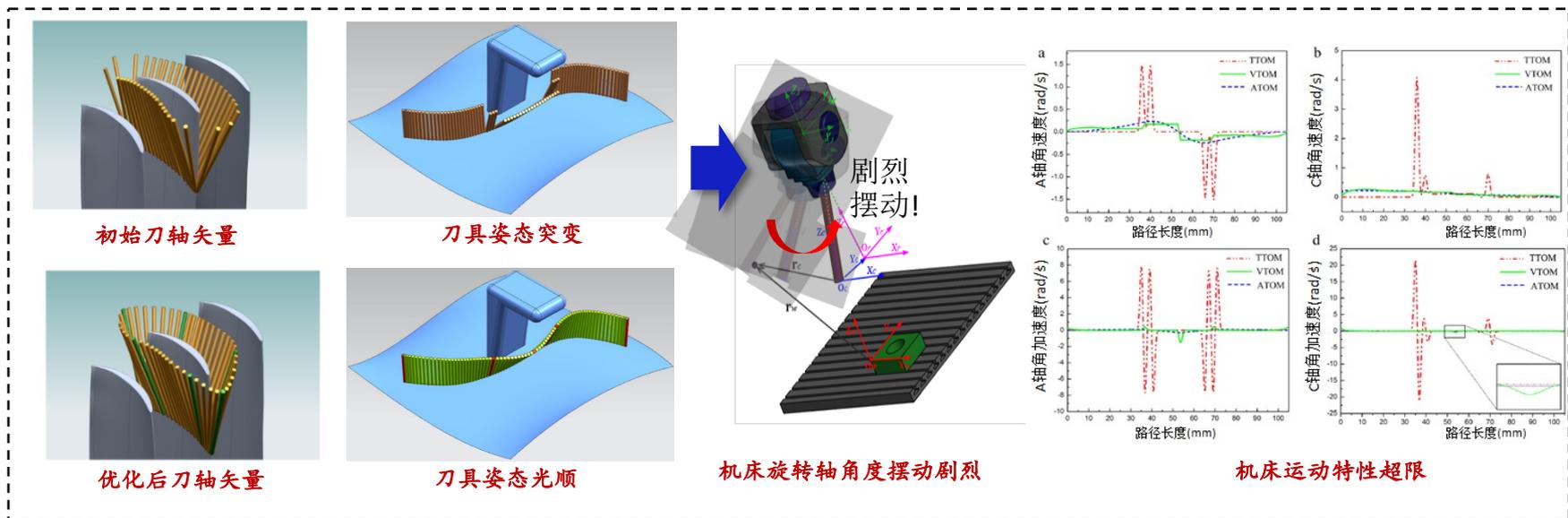


优化前

优化后

五轴加工刀具姿态光顺

问题：仅在几何学层面考虑加工干涉或者增大加工带宽，可能会导致相邻刀触点间刀具姿态发生剧烈变化，导致机床各旋转轴的速度、加速度及加加速度超出机床各驱动轴驱动性能限制的情形出现，致使加工过程失稳、破坏加工表面的完整性。



忽视相邻刀触点间的刀轴光顺问题，导致刀具姿态发生突变，影响机床运动性能

五轴加工刀具姿态光顺

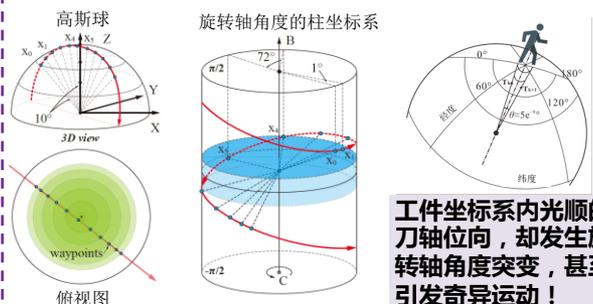
MCS下基于DAO的刀姿光顺方法

将WCS下的刀姿 (α, β) 可行空间变换到MCS下的可行域中 (DAO) ; 在DAO约束下, 通过机床旋转轴变化最小确定光顺的刀姿。

	$a_x^w > 0$	$a_x^w = 0$	$a_x^w < 0$
$a_y^w > 0$	$\phi^A = -\arccos(a_x^w)$ $\phi^C = \arctan(a_x^w/a_y^w) - \pi$	$\phi^A = \arccos(a_x^w)$ $\phi^C = \arctan(a_x^w/a_y^w)$	$\phi^A = -\arccos(a_x^w)$ $\phi^C = \arctan(a_x^w/a_y^w) + \pi$
$a_y^w = 0$	$\phi^A = \arccos(a_x^w)$ $\phi^C = \pi/2$	Singularity point	$\phi^A = \arccos(a_x^w)$ $\phi^C = -\pi/2$
$a_y^w < 0$	$\phi^A = -\arccos(a_x^w)$ $\phi^C = -\pi/2$	$\phi^A = -\arccos(a_x^w)$ $\phi^C = \pi/2$	$\phi^A = \arccos(a_x^w)$ $\phi^C = \arctan(a_x^w/a_y^w) - \pi$

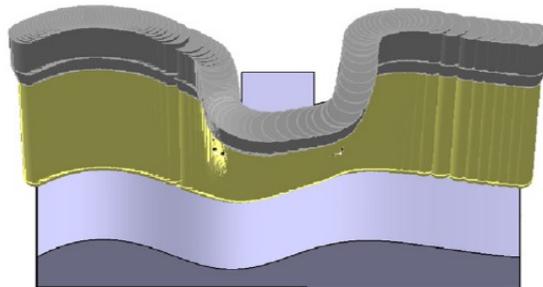
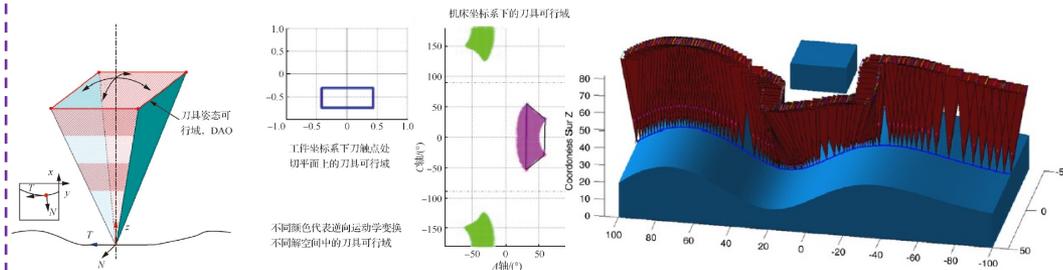
Solution of IKT: Subspace 1, $\phi^A > 0$; Subspace 2, $\phi^A < 0$

机床逆向运动学



非线性变换引发的旋转轴角度突变

建立在机床坐标系下的可行方向域, 将机床各轴的速度、加速度限制融入刀具姿态的优化, 以改善机床的运动性能

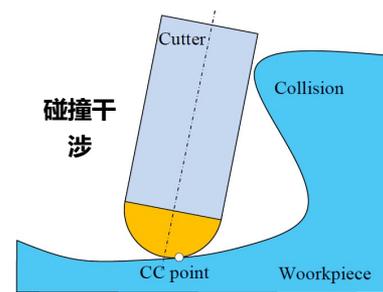
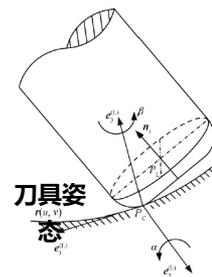


将工件坐标系内的可行方向域, 经逆向运动学映射至机床坐标系下, 涉及可行方向域的边界简化, 而采用凸多边形对边界来表示原本可行域的复杂边界, 有可能会损失原有的最优解, 且计算耗时

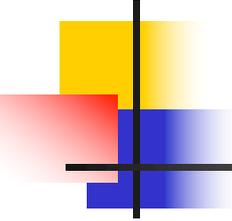
五轴加工刀具姿态光顺存在的问题

存在问题

- 集中在消除局部干涉、全局碰撞干涉等几何约束上；
- 刀具姿态光顺方法大都建立在工件坐标系WCS中；
- WCS下光顺的刀具姿态无法保证光顺的机床运动。



应考虑综合干涉碰撞、机床驱动特性、路径光滑性等几何物理性能！



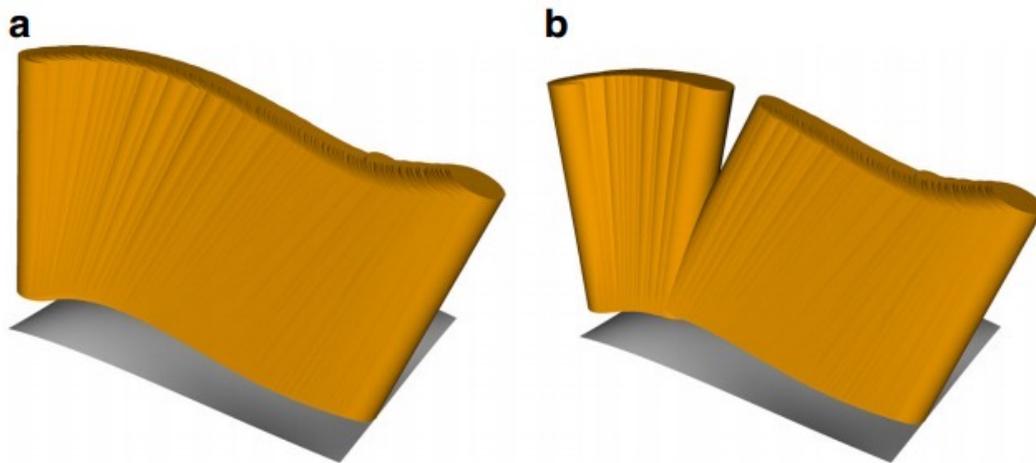
汇报内容

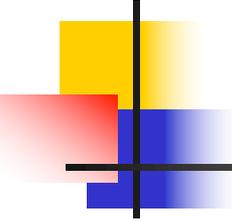
- 自由曲面刀路规划的现状
- 一些新进展
- 未来展望

新进展1：球头刀的刀姿优化

刀轴轨迹规划

- 刀具与待加工曲面之间的干涉会损坏刀具和工件, 造成巨大损失
- 刀具姿态的突变可能会在工件上留下凹痕, 降低加工质量和加工效率

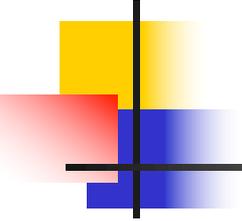




刀姿优化问题

问题描述

- 对于球头刀来说,刀轴方向对加工带宽没有影响(端铣)
- 球头刀的刀位点路径规划,可以视作三轴数控加工中的路径规划
- 只需规划无干涉且光顺的刀轴轨迹



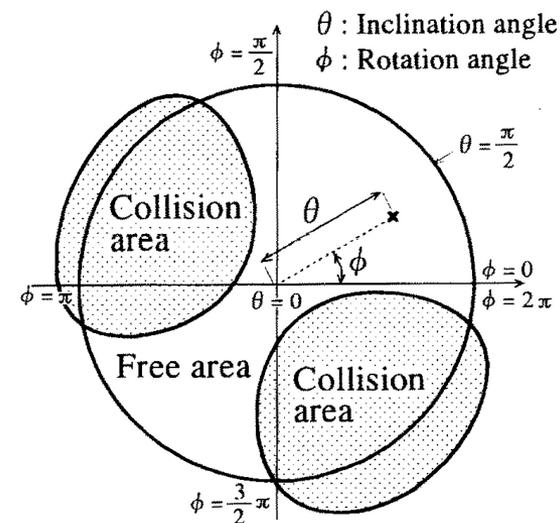
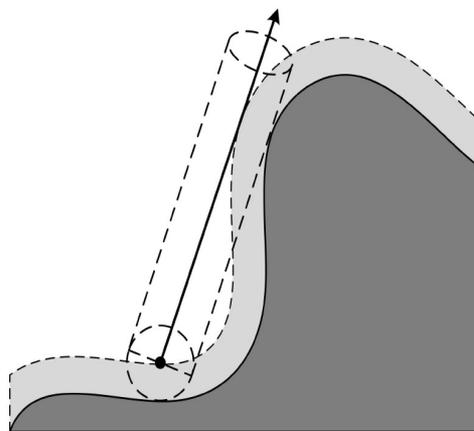
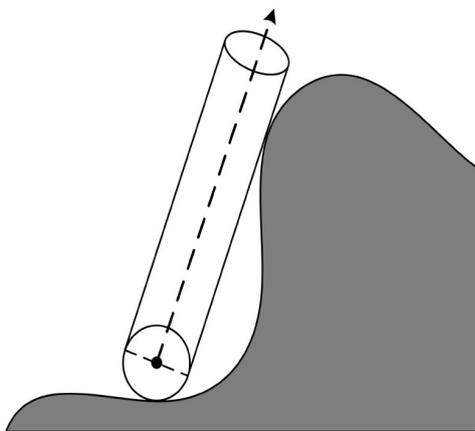
我们的思路

- 每个刀触点的C空间计算
- 根据相邻刀触点的C空间构建图结构
- 根据有向加权图的最短路确定刀轴变化

球头刀的C空间计算

球头刀C空间的计算

- 由于球头刀的特殊性, 刀具与曲面之间的碰撞检测可以转化为射线与偏置曲面的碰撞检测.
- 在偏置曲面某点处, 找出从该点出发的且与偏置曲面不相交的射线, 射线的方向即为该点处C空间的可行刀轴方向



基于图论的方法 (PL)

基于图论的方法(PL 方法)

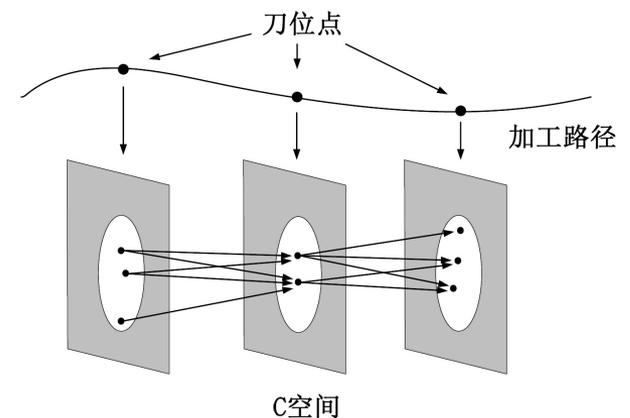
需要解决的问题:

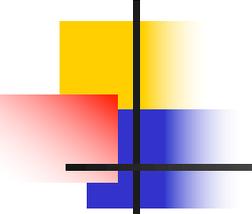
给定加工路径后, 如何规划无突变的刀轴轨迹?

PL 方法的目标:

在保证相邻刀触点之间的刀轴方向变化满足约束的前提下, 使得总的刀轴方向变化最小.

- 离散C空间可行域
- 构建分层有向图给图中的边赋权
- 求解图中最短路得到刀轴轨迹





PL方法的问题与改进

优点:

可以避免刀轴方向突变

缺点:

未考虑刀触点间的距离

未考虑旋转轴的角加速度约束

进一步地优化光滑性：伪速度与伪加速度

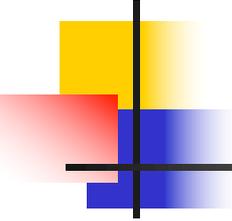
假设进给速度恒定, 为了衡量刀触点间距离以及刀轴方向的变化, 我们定义伪速度与伪加速度.

$$\omega_i = (\theta_{i+1} - \theta_i) / |C_i C_{i+1}|,$$

其中, θ_i 和 θ_{i+1} 分别为两个相邻刀触点 C_i 和 C_{i+1} 处的角度值.

$$a_i = 2(\omega_i - \omega_{i-1}) / (|C_{i-1} C_i| + |C_i C_{i+1}|),$$

其中, ω_{i-1} 和 ω_i 分别为刀触点 C_{i-1} 和 C_i 处的伪速度.



差分图

差分图

- 刀轴轨迹的光顺性需要考虑伪加速度的因素
- 为了在边的赋权中考虑伪加速度的因素, 我们提出了差分图的概念。

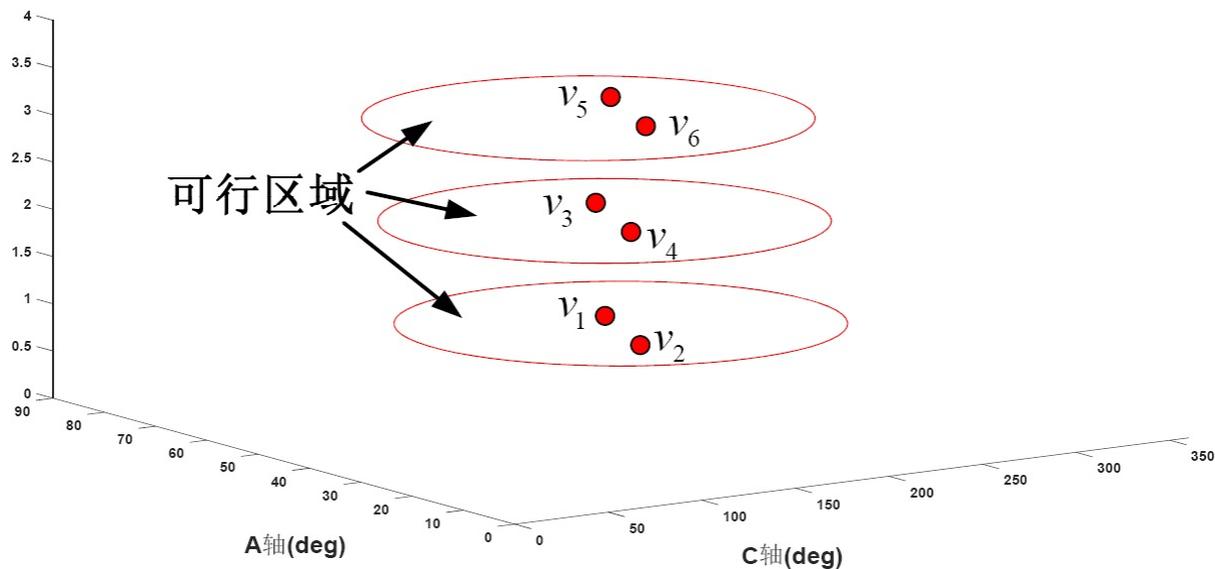
- 差分图的定义:

称 $G^* = \{V^*, E^*\}$ 为分层有向图 $G = \{V, E\}$ 的差分图,
如果 $V^* = \{v^*_{ij} \mid e_{ij} \in E\}$, $E^* = \{v^*_{ij} v^*_{jk} \mid v_j \text{ 顺向连接 } e_{ij} \text{ 和 } e_{jk}\}$ 。

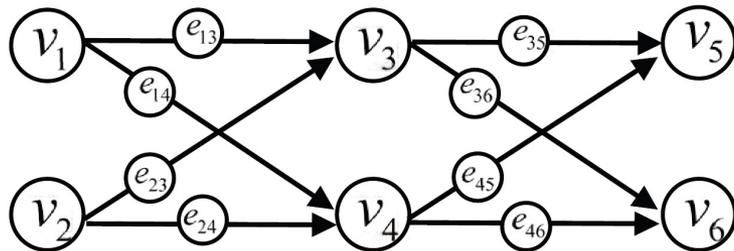
差分图示例

离散C空间可行域

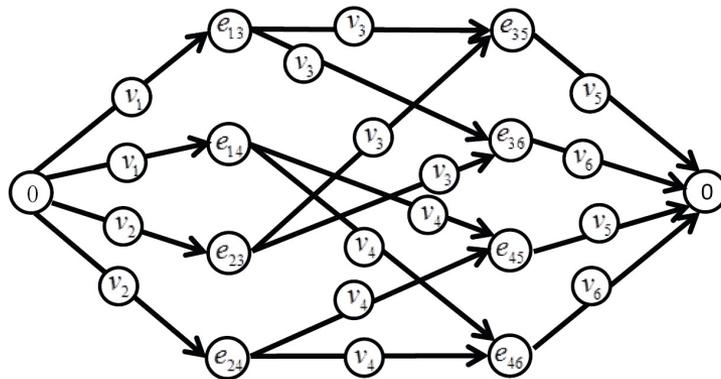
假设在C空间的可行域内只有两个点.



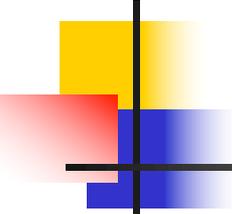
差分图示例



分层有向图 G



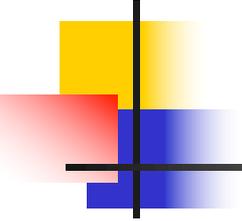
G 的差分图 G^*



差分图的性质与作用

差分图的性质与作用

- ◆ 若分层有向图存在通路, 则差分图必存在通路
- ◆ 差分图中边的权值可以包含伪速度和伪加速度的信息, 进而可以更好地光顺刀轴轨迹
- ◆ 差分图不仅适用于刀轴轨迹规划, 也可用于刀位点路径规划
- ◆ 在给差分图中的边赋权时, 可以同时引入多个因素



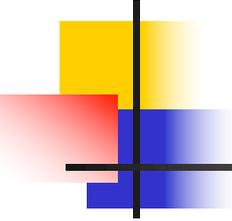
基于差分图的优化模型

优化问题可表示为:

$$\begin{cases} \min \sum_i |\omega_i| \\ \min \sum_i |a_i| \\ \text{s.t. } |\omega_i| \leq \Omega_{max}, \quad i \in \{1, \dots, N\}. \end{cases}$$

其中, ω_i 与 a_i 分别为第 i 个刀触点处的伪速度与伪加速度, N 是刀触点个数。

该多目标优化问题求解困难, 并且一般情况下, 两个目标函数不能同时满足

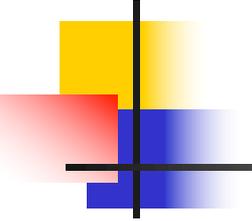


优化模型转化

数学模型的转化

对两个目标函数进行加权, 转化为单目标优化问题

$$\begin{cases} \min \sum_i (|\omega_i| + \lambda |a_i|), \\ \text{s.t. } |\omega_i| \leq \Omega_{max}, & i \in \{1, \dots, N\}. \end{cases}$$



优化问题的求解

单目标优化问题的求解

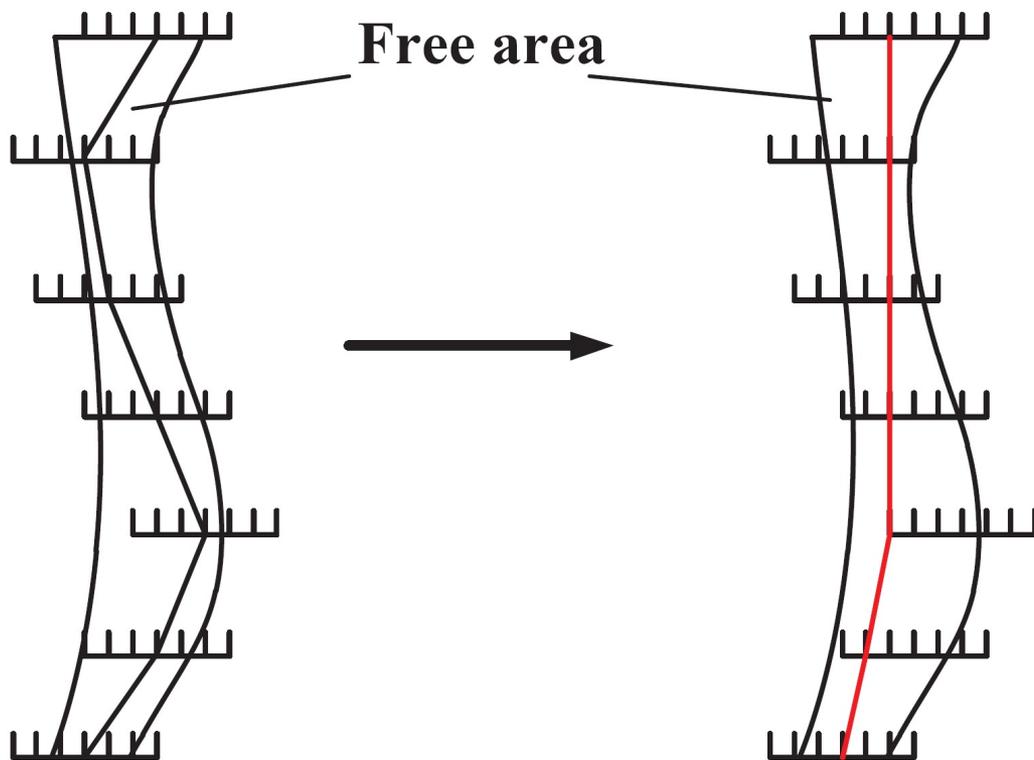
由于考虑了伪加速度的约束, 因此可以利用差分图进行求解

1. 将C空间可行域进行离散
2. 利用离散点构建分层有向图及其差分图, 并为差分图中的边赋以适当权值($w = v + \lambda a$)
3. 计算差分图中的最短路径, 得到优化后的刀轴轨迹

细分调整

细分调整算法的图示

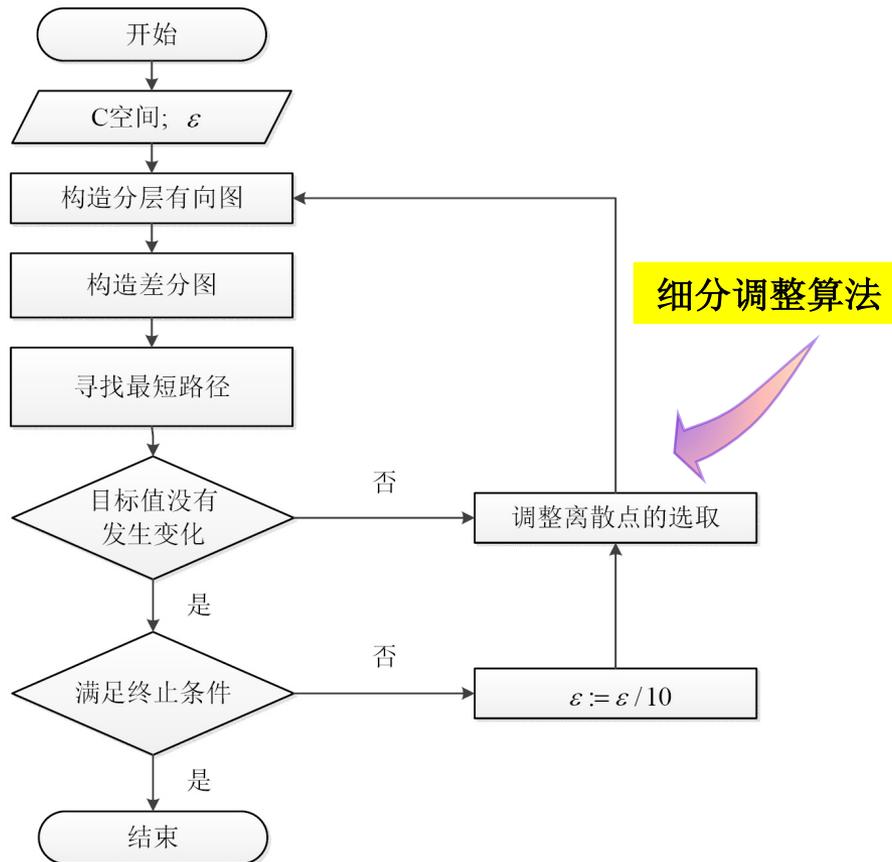
由于计算能力的限制, 因此离散点数量不能过多, 导致所得结果较为粗糙, 不能得到连续意义下的局部最优解。

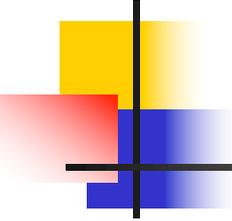


(a) 初始刀轴轨迹 (b) 算法后的刀轴轨迹

算法流程

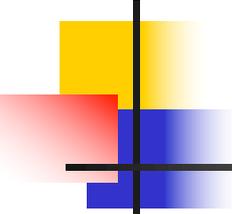
基于差分图的刀轴轨迹规划算法流程图





算法特点

- 由于分层有向图中的顶点都在**C**空间可行域内, 因此最终的刀轴轨迹是无干涉的.
- 在离散**C**空间可行域时, 可以将奇异位置所对应的刀轴区域删去, 以避免刀轴方向的奇异位置.
- 由于考虑了伪加速度的影响, 因此最终的刀轴轨迹光顺性较好.



实验结果对比

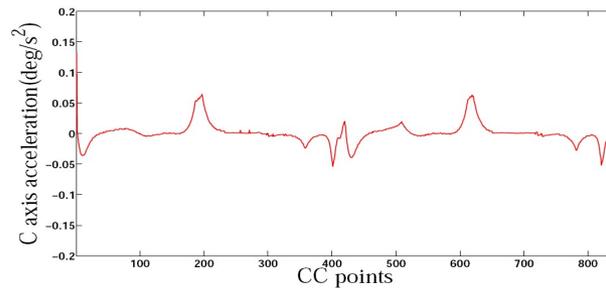
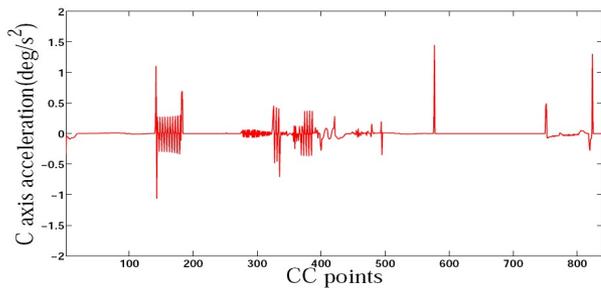
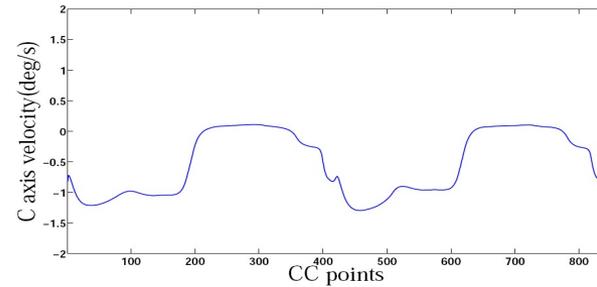
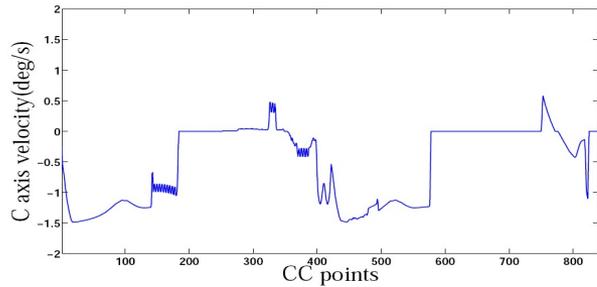
实验结果数据对比(S件)

	PL 方法	我们的方法
$\Delta^A(deg)$	0	1.132
$\Delta^C(deg)$	375.156	381.468
$ \omega _{max}^A(deg/s)$	0	0.0050
$ a _{max}^A(deg/s^2)$	0	0.0041
$ \omega _{max}^C(deg/s)$	1.4860	1.4461
$ a _{max}^C(deg/s^2)$	1.2952	0.1326

其中, Δ 、 $|a|_{max}$ 和 $|\omega|_{max}$ 分别代表整条路径上, 旋转轴的整体角度变化, 最大伪加速度和最大伪速度.

实验数据对比

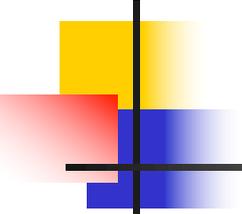
C 轴实验结果对比



PL 方法得到的C轴伪速度与伪加速度

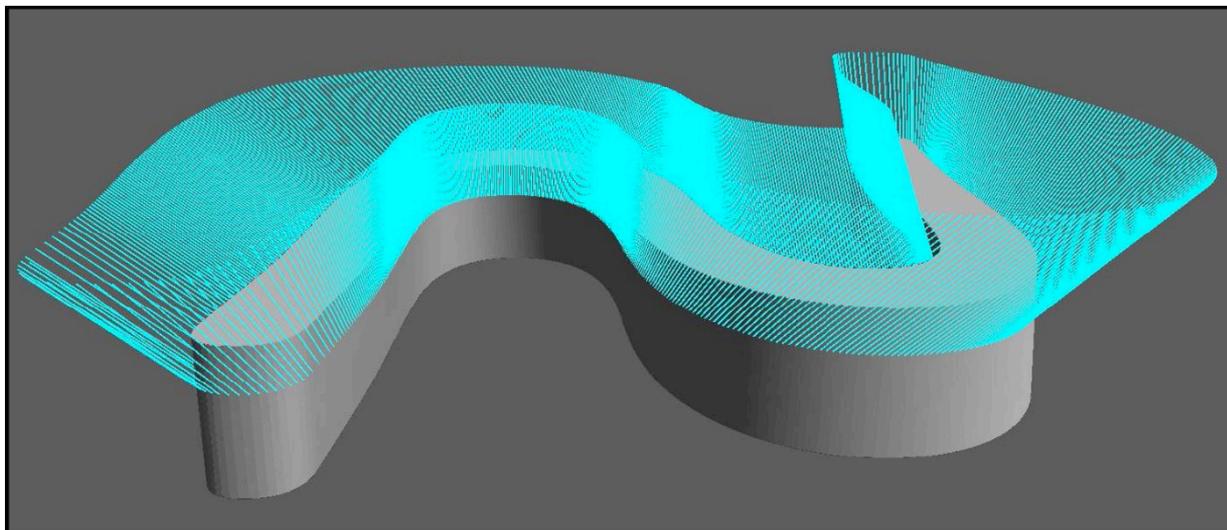
我们的算法得到的C 轴伪速度与伪加速度

与PL方法相比,我们的方法得到的刀轴明显光顺得多

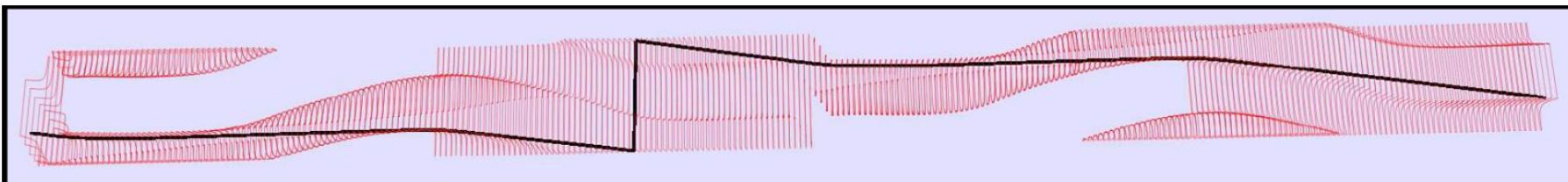


仿真结果 (S件)

S件仿真结果:



C空间可行域及最终刀轴轨迹:

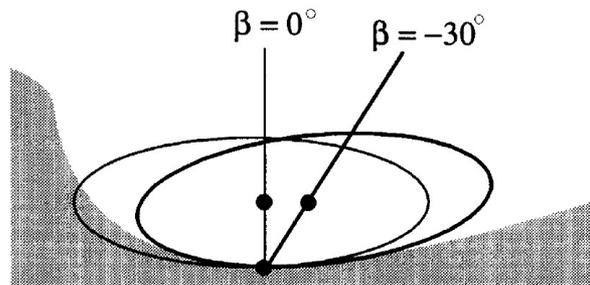
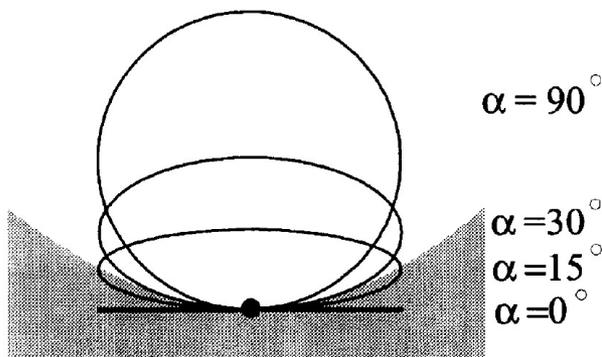


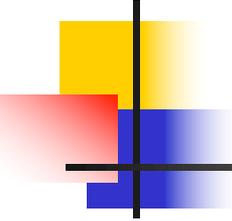
新进展2：平底刀的路径规划

问题描述

刀轴方向与加工带宽息息相关

是否能先给出无干涉的曲面上的刀轴方向，然后规划刀轴路径？





平底刀的路径规划目标

平底刀刀具轨迹规划目标

生成无干涉且光顺的刀轴轨迹规划光滑的刀位点路径, 并使得总路径长度尽可能短

准备工作

- 目标曲面具有参数形式 $\mathbf{S}(u, v)$
- 目标曲面离散成网格形式 $\{\mathbf{S}(u_i, v_j)\}_{i=0, \dots, M, j=0, \dots, N}$, 其中 $u_0 = 0, u_i = i/M, v_0 = 0, v_j = j/N$
- 预设加工方向为沿 u 方向(等 v 线)

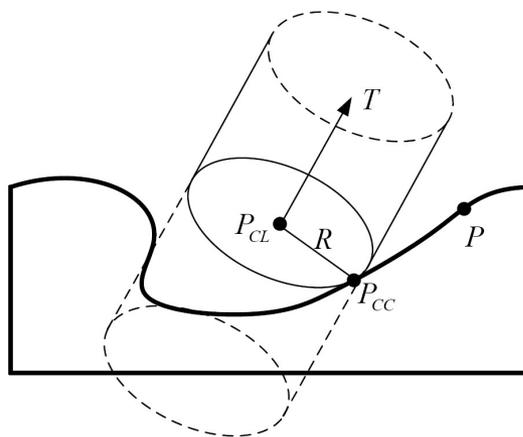
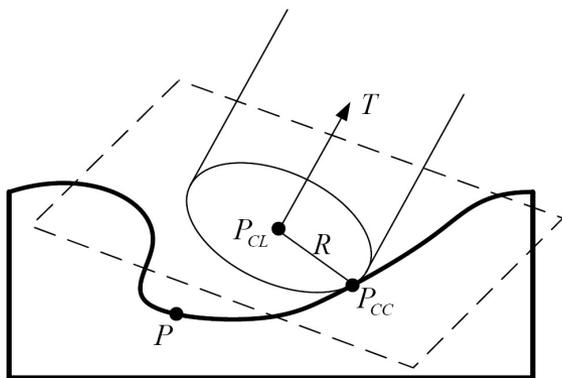
C空间计算

平底刀C空间的计算

目标曲面 $S(u, v)$ 上某一刀触点 P_{CC} 处的可行刀轴方向, 必须满足下列两式之一

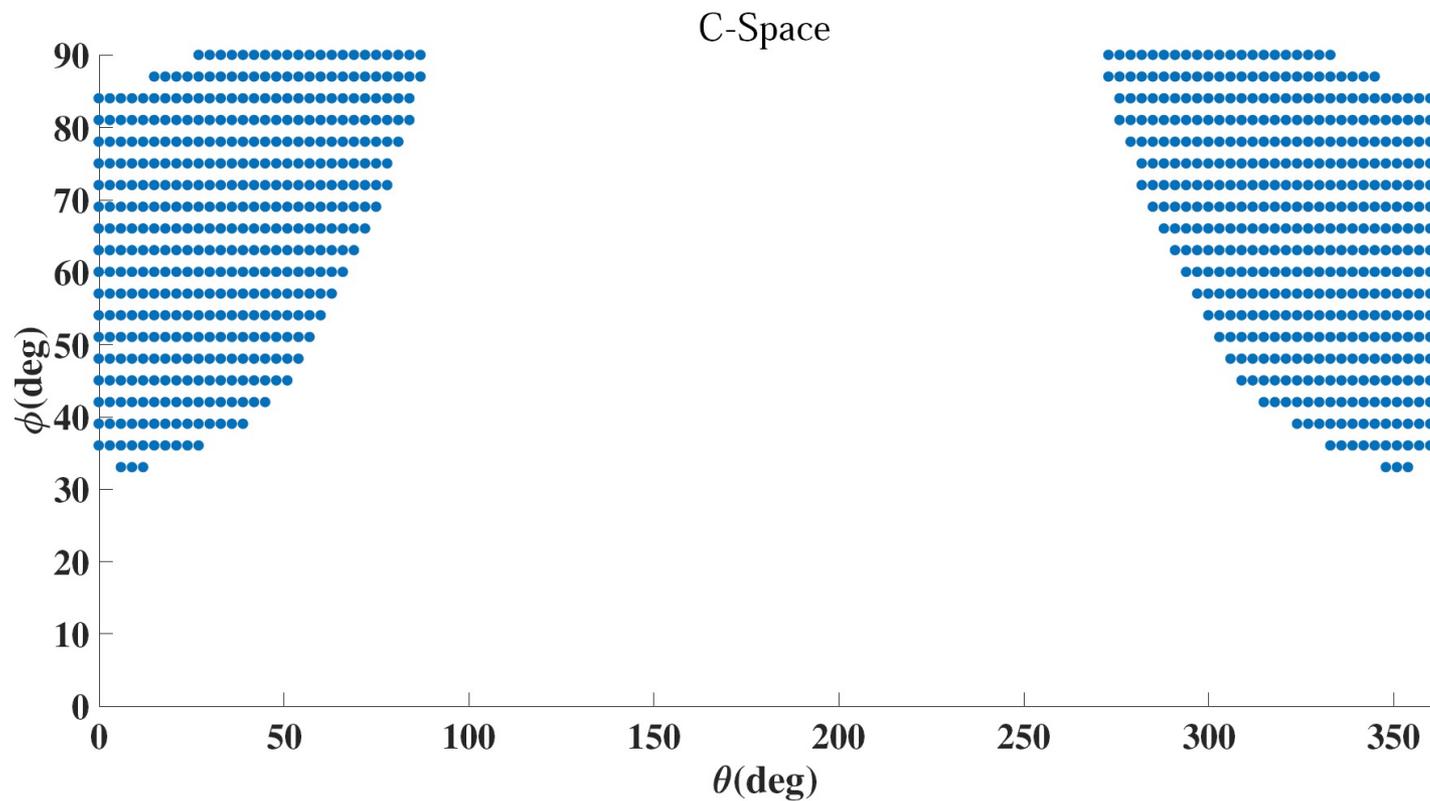
$$(\mathbf{P} - \mathbf{P}_{CC}) \cdot \mathbf{T} \leq 0,$$

$$\|(\mathbf{P} - \mathbf{P}_{CL})\|^2 - (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{CL}) \cdot \mathbf{T} \geq R^2.$$



C空间示例

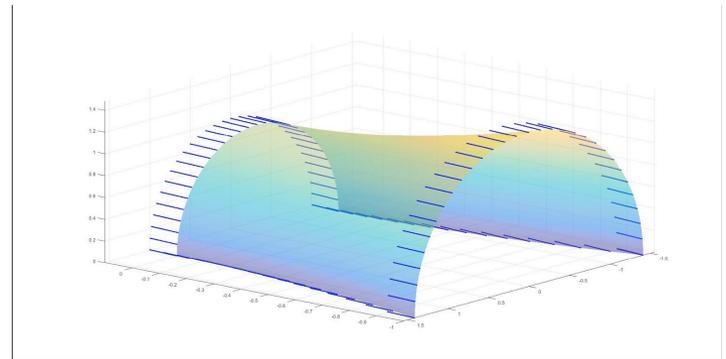
平底刀在某点处的C空间



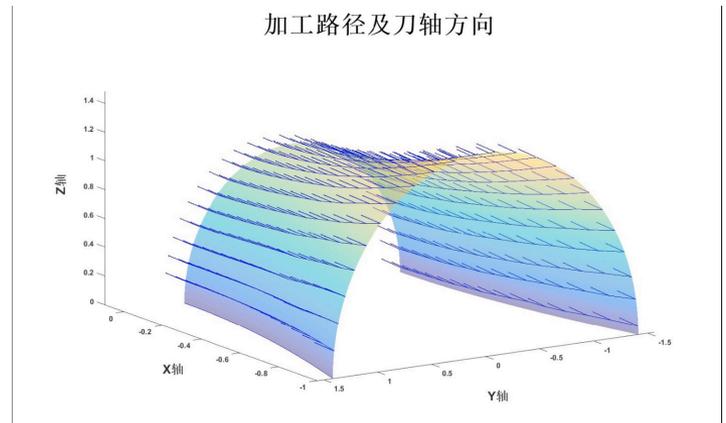
刀轴方向生成

表面上的刀轴方向生成

■ 生成曲面边界上的刀轴方向



■ 生成整个表面上的刀轴方向

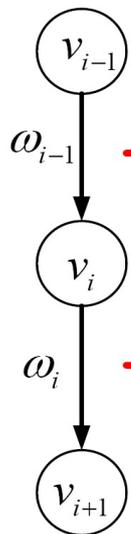


差分图的构建

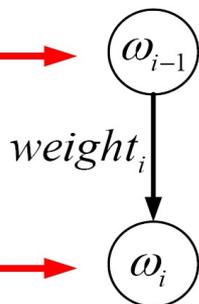
差分图中边的赋权

利用平底刀进行加工时, 不同的刀轴方向会影响加工带宽
在赋权时需要同时考虑刀轴轨迹的光顺性和加工带宽

分层有向图



差分图

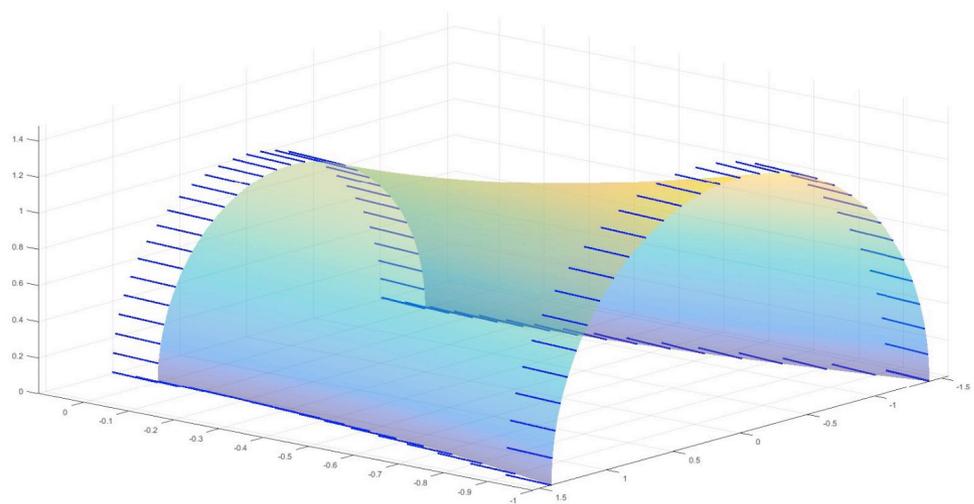
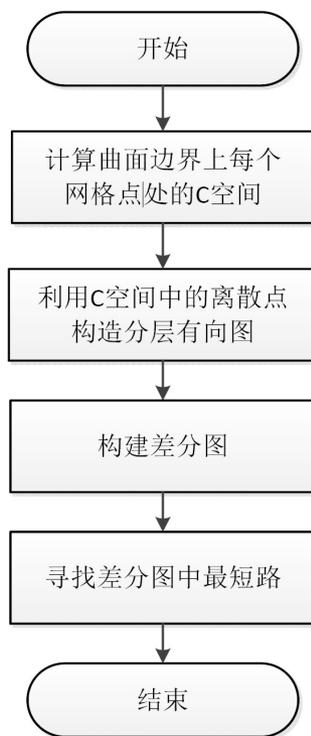


设 $v_i = (\theta_i, width_i)$, 则

$$weight_i = a_i + \lambda \cdot \frac{1}{width_i}$$

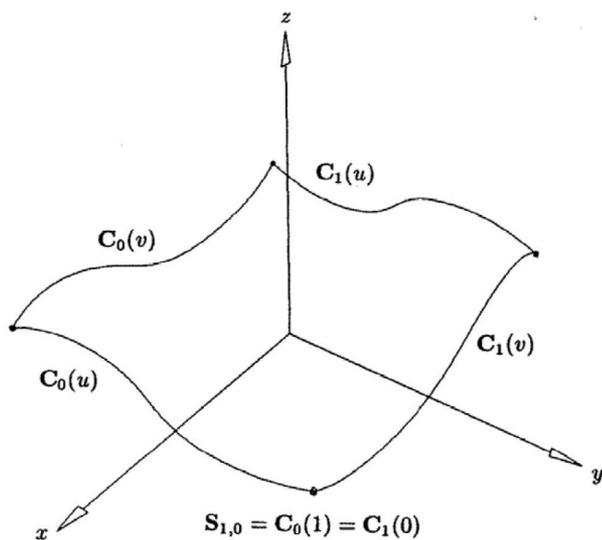
刀轴方向优化方法

曲面边界刀轴优化算法流程图

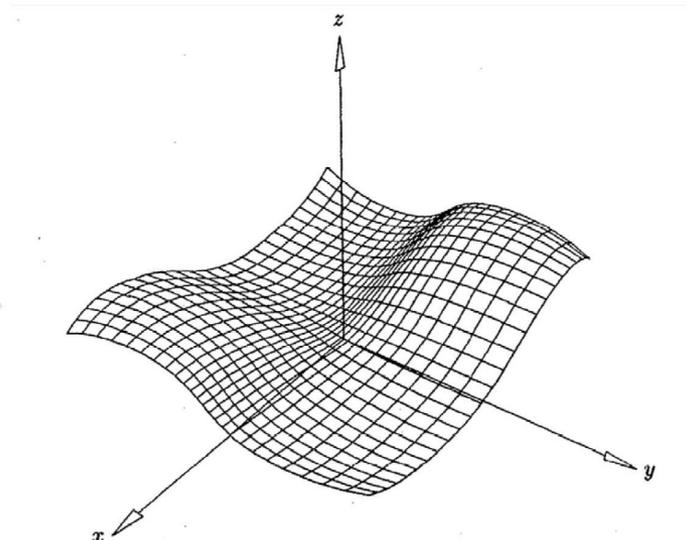


Coons 曲面插值

Coons 曲面插值获得曲面内部刀轴方向的初值



曲面四条边界



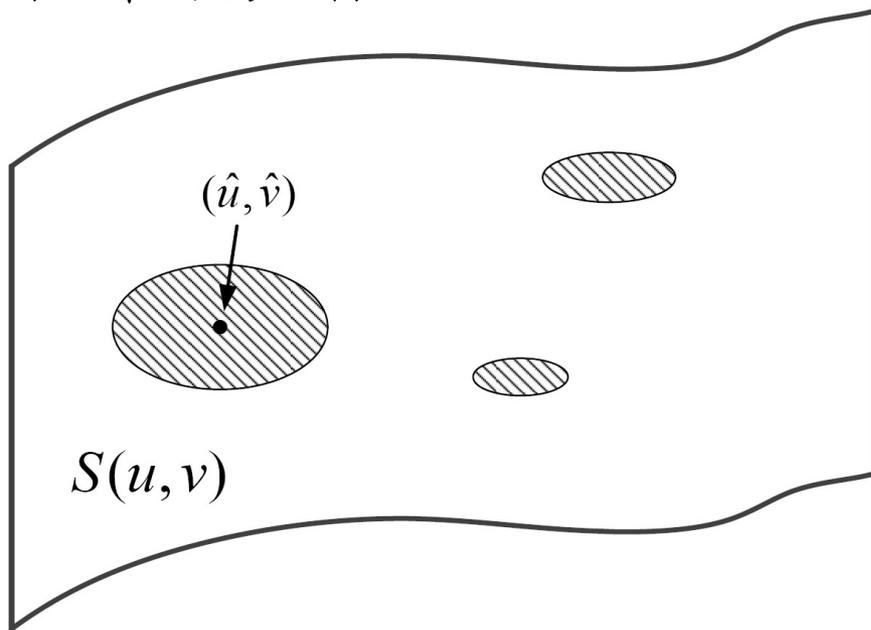
Coons 曲面插值

检查不可行刀轴方向

选取分割点

由Coons插值得到的各网格点处刀轴方向不一定可行

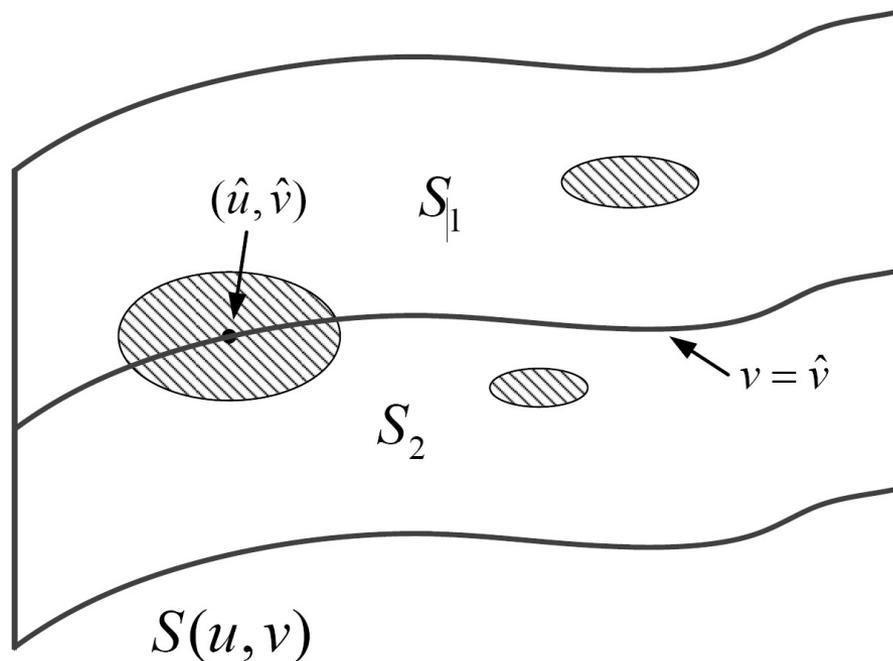
需要对曲面进一步细分确定不可行区域，在最大不可行区域中，选择中心网格点作为分割点



选取分割线进行刀轴方向优化

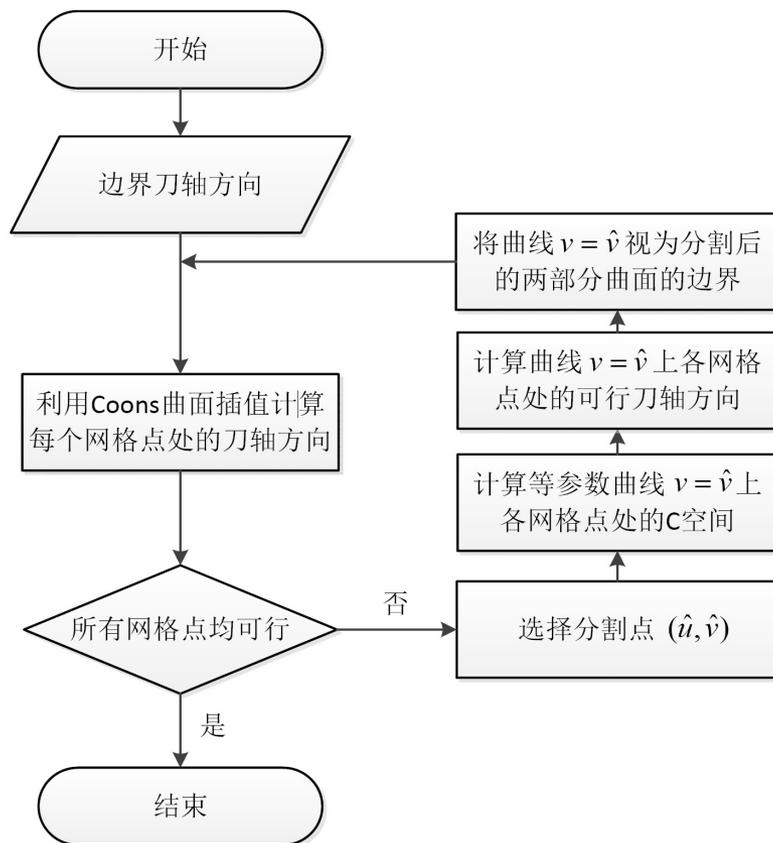
选取分割线

由于预设的加工方向是沿 u 方向, 因此选取由 (\hat{u}, \hat{v}) 确定的等参数曲线 $v = \hat{v}$ 。



曲面内部网格点刀轴方向生成

曲面内部各网格点处刀轴方向生成流程图

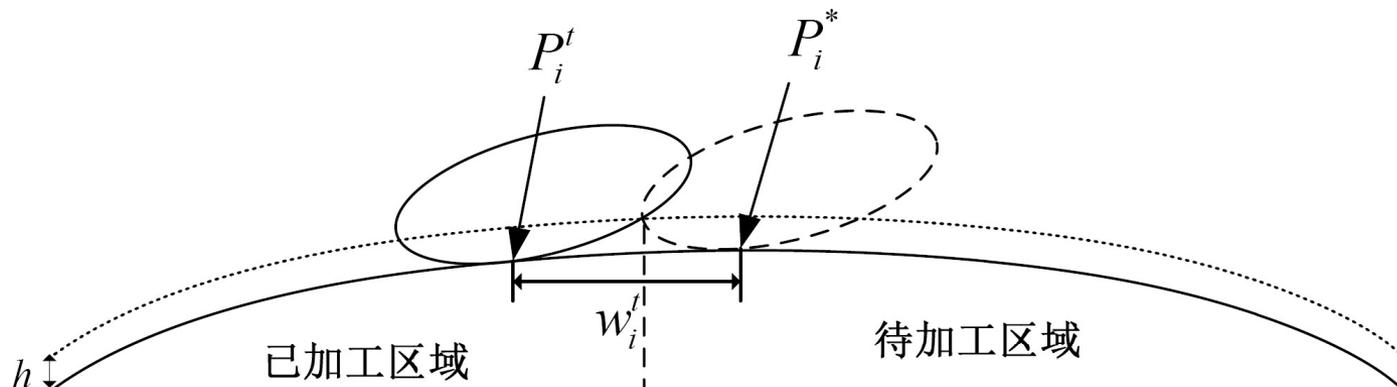


刀位点路径生成

刀位点路径的生成

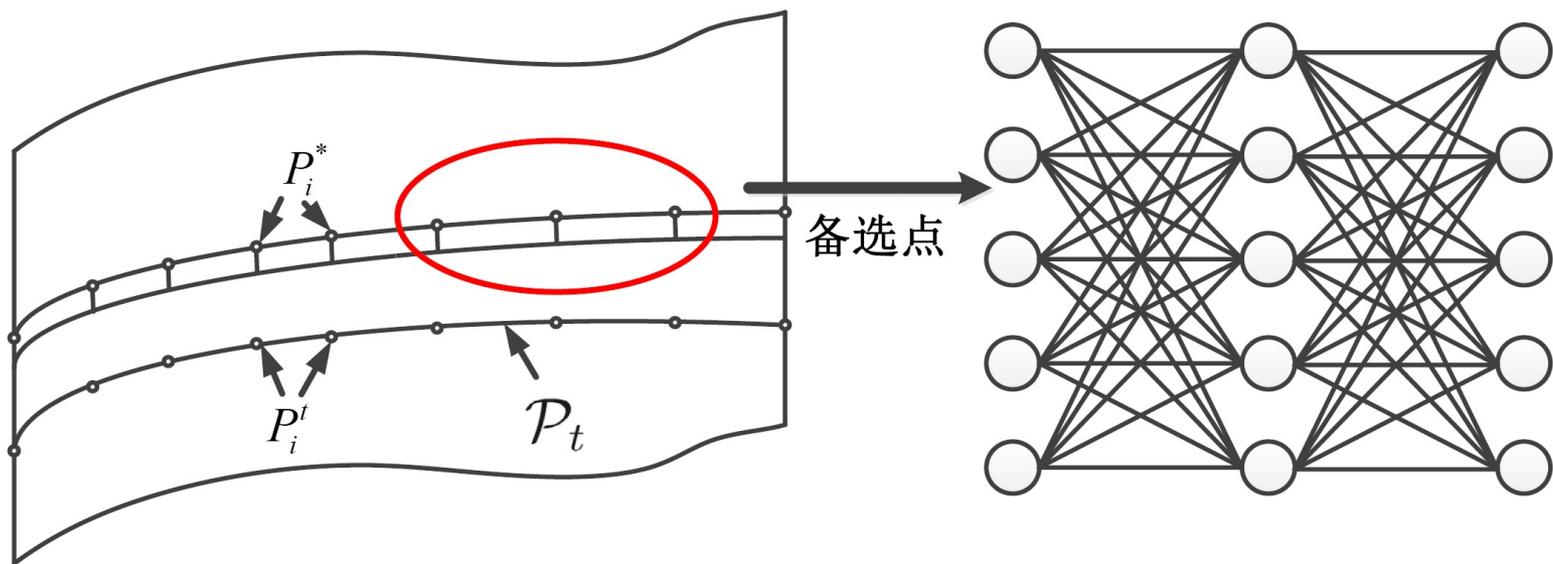
已知当前刀位点路径, 如何生成下一条刀位点路径?

在垂直于当前加工方向的平面内, 找到曲面待加工区域中的等残高点。



刀位点路径生成

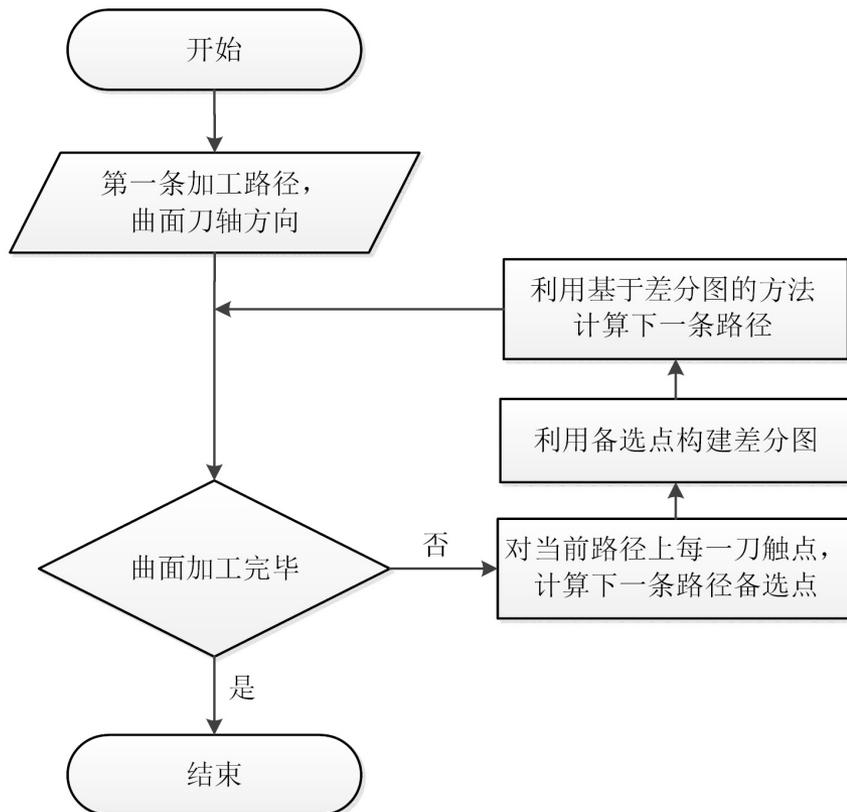
以等残高点为基准，向垂直加工方向进行局部采样，构建差分图来兼顾加工带宽和路径的光滑性。



$$weight = k + \lambda \frac{1}{dist},$$

刀位点路径生成

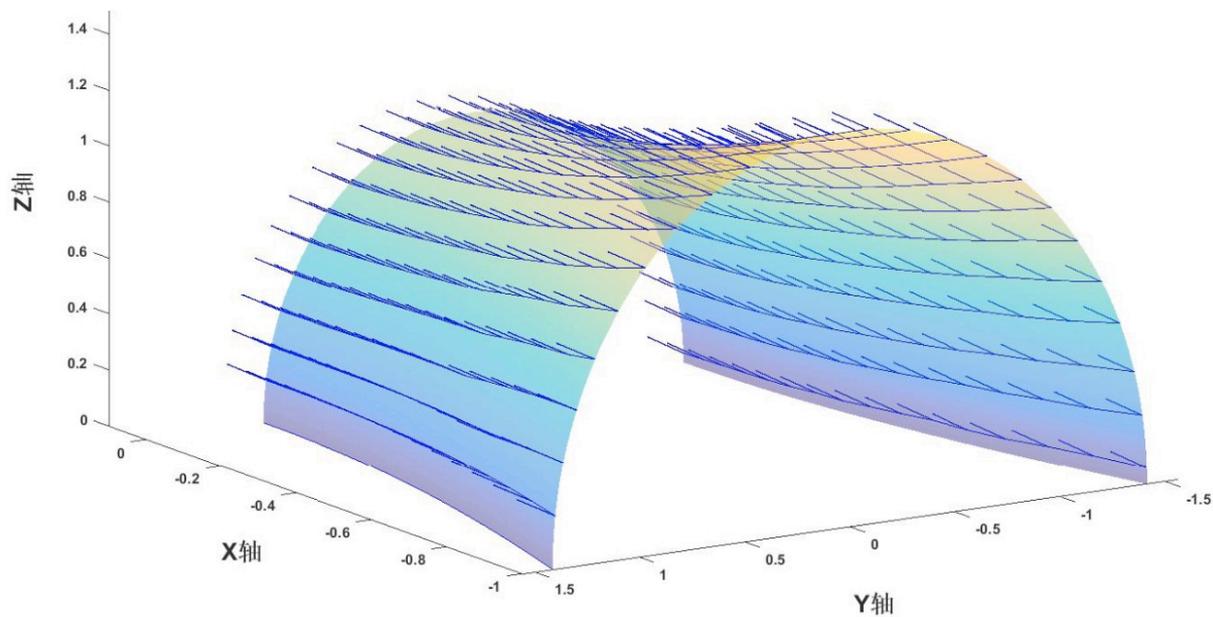
刀位点路径规划算法流程图



平底刀路径生成

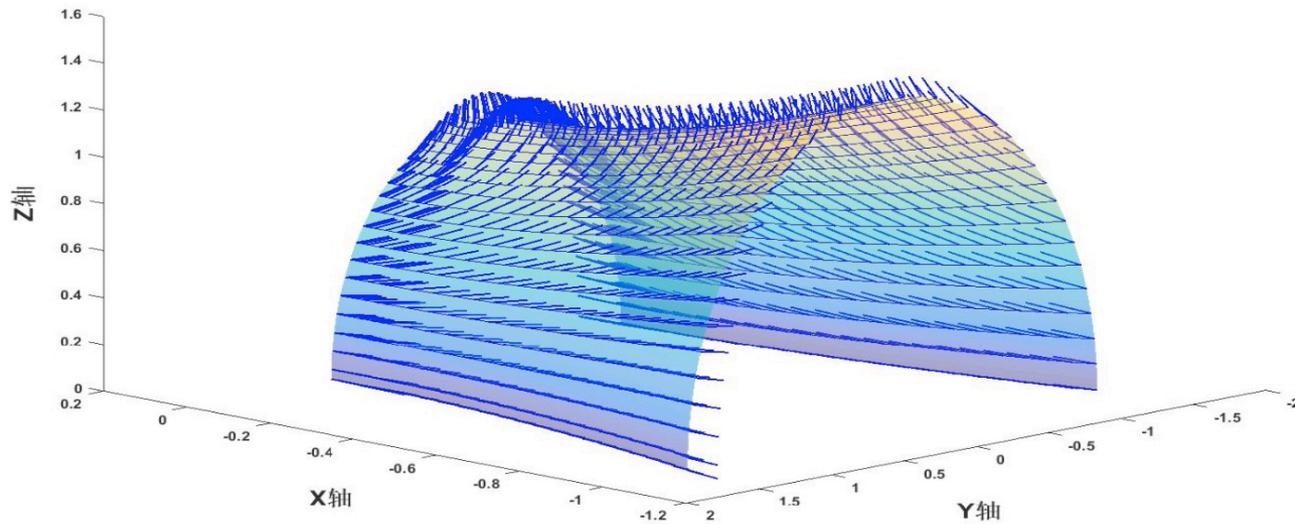
实验结果

加工路径及刀轴方向



UG 生成的结果

UG生成的加工路径和刀轴方向

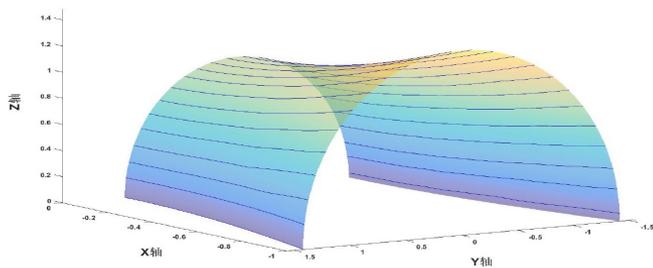


UG 生成的刀轴方向, 整体上会出现较大的扭动

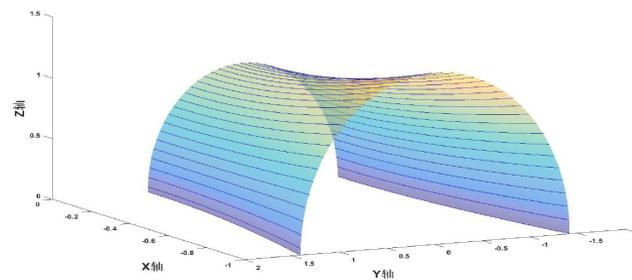
结果对比

加工路径数量对比 (23 VS 41)

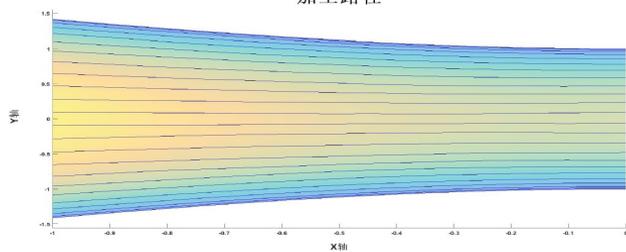
加工路径



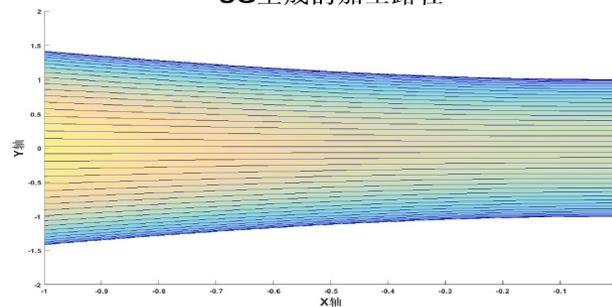
UG生成的加工路径



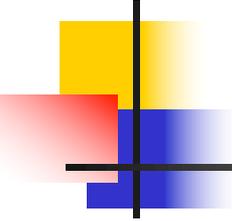
加工路径



UG生成的加工路径



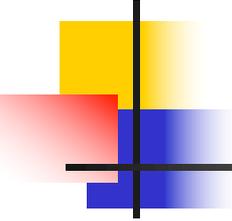
我们的方法生成的路径数量和总长度都小于UG的结果



小结

- 针对球头刀，设计了基于差分图的刀轴轨迹优化算法
- 同时考虑旋转轴的伪速度和伪加速度约束
- 提出了差分图的概念，并设计了相应算法，生成无干涉且光顺的刀轴轨迹

- 针对平底刀，设计了一种新的刀具轨迹规划方法
- 考虑了整个曲面上刀轴方向的光顺性
- 考虑了刀轴方向与加工带宽之间的关系，给出了刀轴轨迹和刀位点路径新的规划方法
- 生成了光顺的刀轴轨迹和光滑的刀位点路径，从而可以兼顾加工效率与加工质量

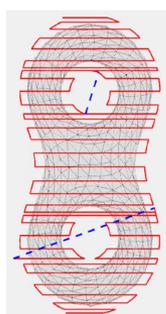


三：未来展望

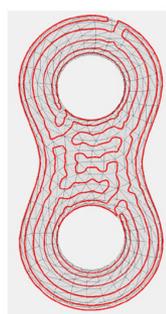
- 发展高效、实用的CAM路径规划算法，与运动插补结合，开发高速、高精的数控加工新模式。
 - CAM：最优加工路径的数学理论与算法
 - 路径设计与速度规划的结合（CAM与CNC一体化）
 - 形状误差与控制系统结合研究

三：未来展望

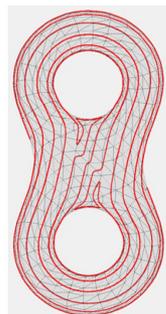
- CAM与CNC一体化的初步尝试：
基于连通费马螺旋线的刀路规划（三角网格曲面）



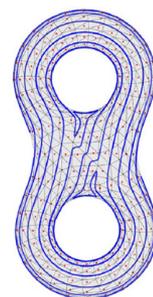
(a) The Zigzag path generated by UG.



(b) The tool path given by Zhao et al.



(c) The tool path given by us.



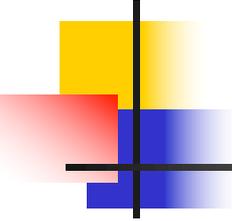
(d) The sample points on surface.



方法	Zigzag路径 (UG)	Zhao等人的方法	我们的方法
加工时间(s)	12.137	8.442	4.065
最小进给速度(mm/s)	11.8749	10.1924	7.9459
平均进给速度(mm/s)	98.319	89.5272	177.2517
最大进给速度(mm/s)	197.8549	168.4692	233.1711
路径长度(mm)	1139.238	755.789	714.579

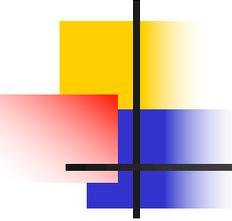
数字化设计制造一体化





未来展望

- CAM是承接CAD和CNC的桥梁，但传统方法割裂了CAD和CNC
 - 传统的方法在CAD/CAM/CNC的各个方面都有大量的研究进展（局部优化）
 - 如何结合一体化的思路进一步优化（全局优化）？
 - 曲面直接插补技术？时间样条？



谢谢!

参考文献:

- **Z. Mi, C.M. Yuan, X. Ma, L.Y. Shen, Tool orientation optimization for 5-axis machining with C-space method, Int J Adv Manuf Technol, 88(5): 1243-1255, 2017.**
- **Tool Orientation Optimization and Path Planning for 5-Axis Machining, Journal of Systems Science and Complexity, 34 (1): 83-106, 2021.**
- **H.Y. Ma, C.M. Yuan, L.Y. Shen, Tool Path Planning with Confined Scallop Height Error Using Optimal Connected Fermat Spirals, to appear in Communications in Mathematics and Statistics.**