

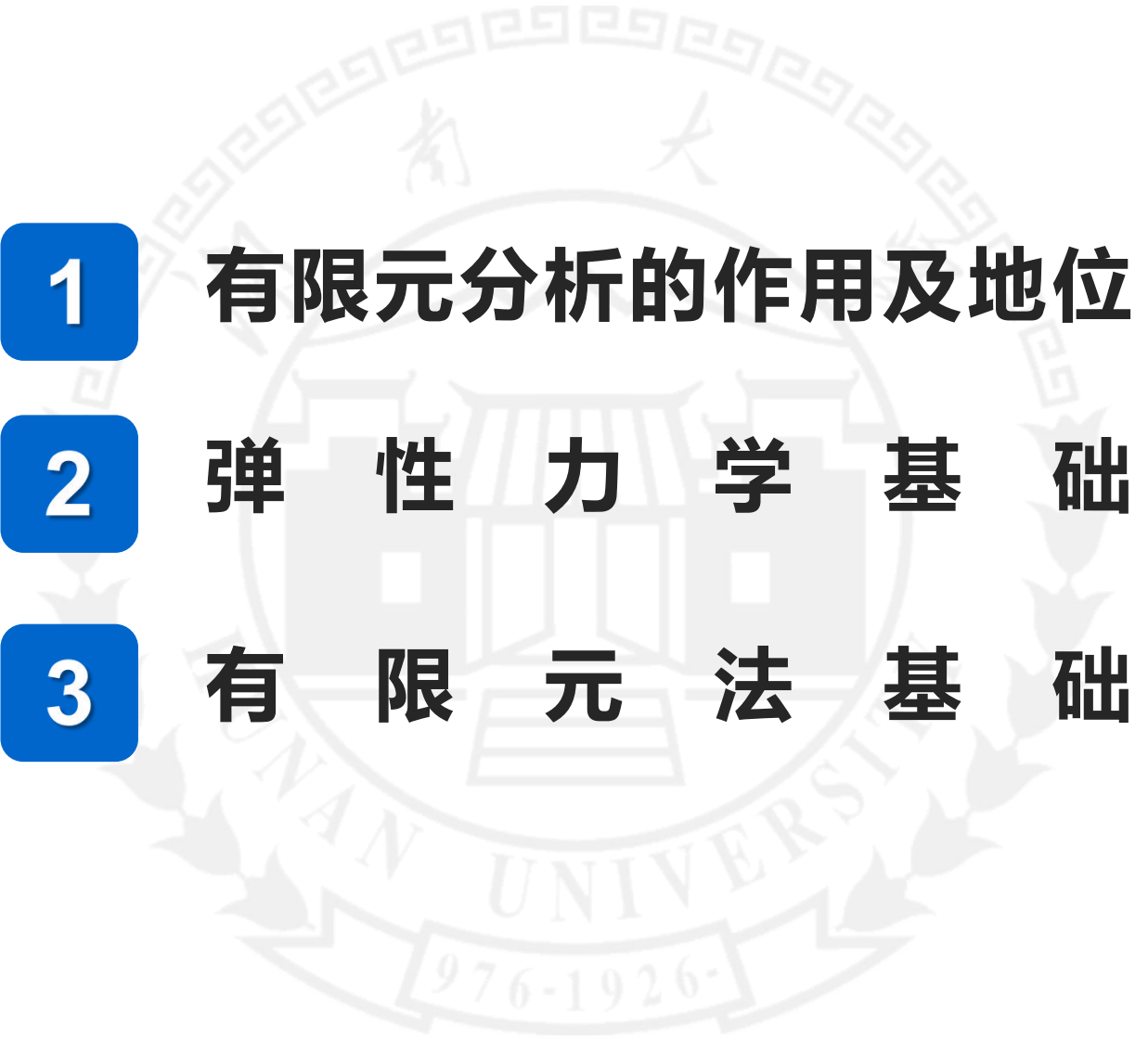


工程CAE仿真中的 有限元分析原理

蔡勇

湖南大学 & 迈曦软件

2023.7.2

The background of the slide features a large, faint, light-gray watermark of the Tsinghua University seal. The seal is circular, with the university's name in Chinese characters '清華大學' at the top and 'TSINGHUA UNIVERSITY' at the bottom. In the center is a depiction of a traditional Chinese building, and at the very bottom, a banner contains the founding year '1911'.

1

有限元分析的作用及地位

2

弹性力学基础

3

有限元法基础

1、有限元分析的作用及地位

现代工业的进步，完全得力于计算机科技的突飞猛进。将计算机、计算机软件应用于产品的开发、设计、分析与制造，已成为近代工业提升竞争力的主要方法。

- ✓ CAD

- ✓ CAM

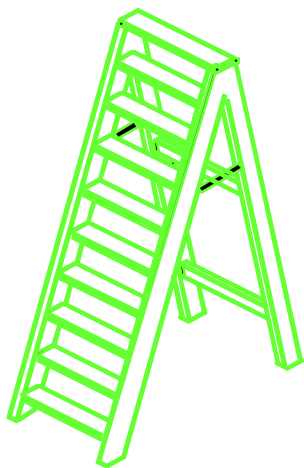
- CAE

CAE：在产品的研发过程中，利用计算机进行建模及性能仿真分析

有限元法是CAE的最主要方法，是处理各种复杂工程问题的重要分析手段，也是进行科学研究的重要工具。利用有限元分析可以获取几乎任意复杂工程结构的各种机械性能信息，可以直接就工程设计进行各种评判及优化，提高产品品质。

有限元分析的作用及地位

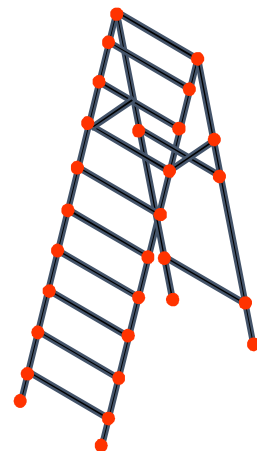
- **有限元方法是求解数学物理问题的一种数值计算方法**，起源于固体力学，然后迅速扩展到流体力学、传热学、电磁学等其他物理领域。
- **有限元分析**是利用数学近似的方法对真实物理系统（几何和载荷工况）进行模拟。利用简单而又相互作用的元素，即**单元**，用有限数量的未知量去逼近无限未知量的真实系统。
- **有限元模型** 是真实系统理想化的数学抽象。



真实系统

有限元模型由一些简单形状的**单元**组成，单元之间通过**节点**连接，并承受一定**载荷**。节点具有一定的**自由度**。

自由度(DOFs) 用于描述一个物理场的响应特性。



有限元模型

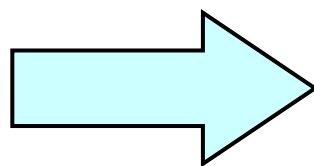
有限元分析的作用及地位

有限元的思路

以计算机为工具，分析任意的变形体以获得所有力学信息，并使该方法能够普及、简单、高效、方便，一般人员可以使用。

实现办法

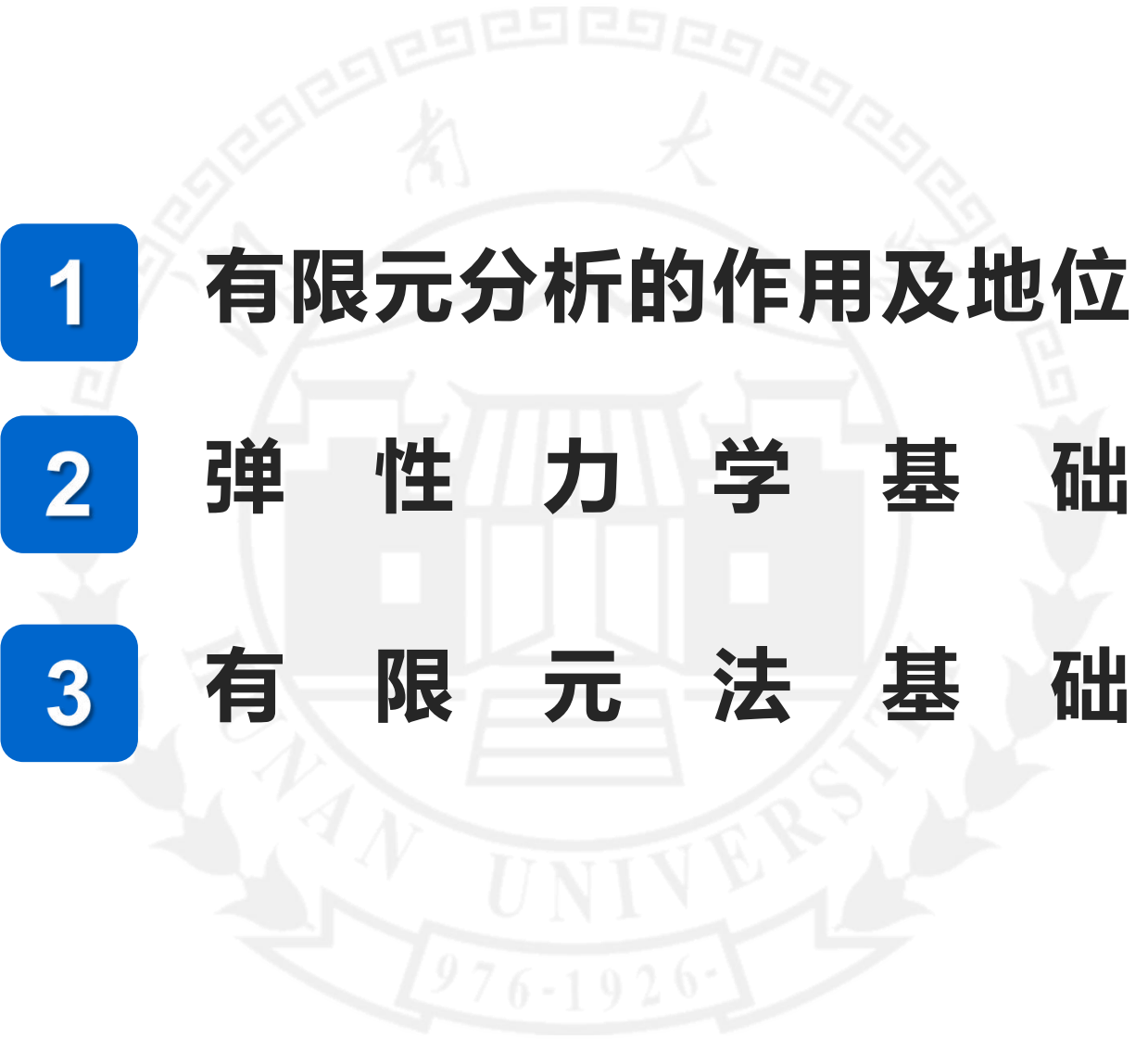
有限种类的
标准件



构造出任意复杂
的对象

技术路线

- ◆ 标准化 (任意复杂问题--> 标准化分解, 单元建模--> 有限种标准单元)
- ◆ 规范化 (CAD几何-> 数值模型(力学建模)-> 求解-> 后处理显示)
- ◆ 计算机化 (标准程序-> 模块-> 软件)

The background of the slide features a large, faint, light-gray watermark of the Tsinghua University seal. The seal is circular, with the university's name in Chinese characters '清華大學' at the top and 'TSINGHUA UNIVERSITY' at the bottom. In the center is a depiction of a traditional Chinese building, and at the very bottom, a banner contains the founding year '1911'.

1

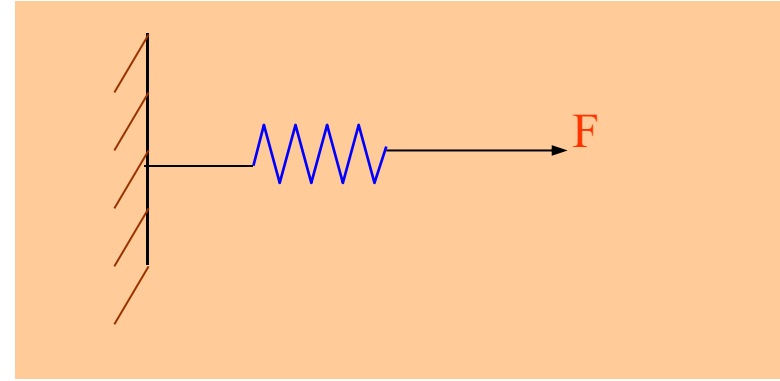
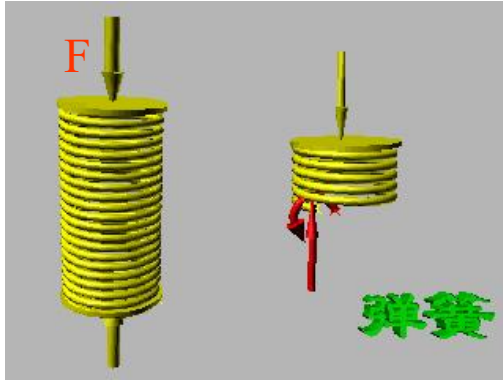
有限元分析的作用及地位

2

弹性力学基础

3

有限元法基础

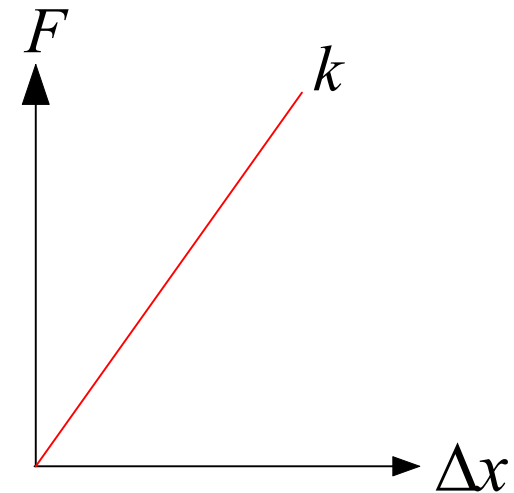


胡克定律：弹性体的变形
与外力成正比

弹性体：弹簧

外力—变形关系： $F = k \cdot \Delta x$

k — 弹簧系数



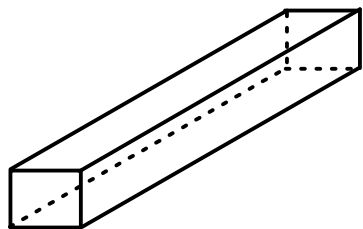
➤ 力的基本概念

- **定义**：力是物体间的相互机械作用，其作用结果使物体的形状和运动状态发生改变。
- **效应**：**I.** 运动状态变化——外效应（运动效应）——理论力学研究。
II. 形状变化——内效应（变形效应）——变形体力学研究。
- **三要素**：大小、方向和作用点。
- **表示方法**：力是一矢量，采用矢量记号表示。
- **单位**：国际单位制中，力的单位是牛顿（N）

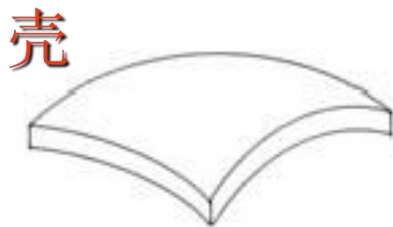
$$1\text{N}=1\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2。$$

工程结构的分类（按构件的几何特征）

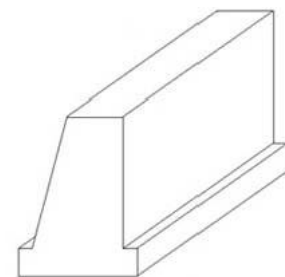
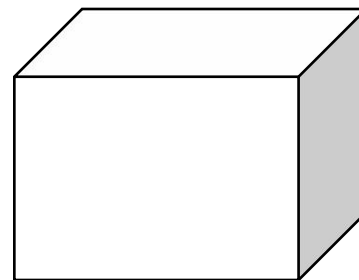
- ❖ 杆件结构：长度远大于横截面尺寸（宽和高）；材
- ❖ 薄壁结构（平一板、曲一壳）：两方向的尺寸（长和宽）远大于另一方向的尺寸（高）；
- ❖ 实体结构：三方向的尺寸具有同阶大小。弹



杆件结构

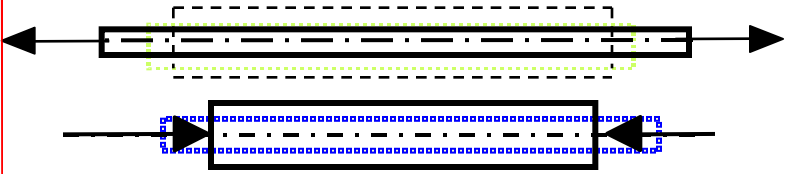
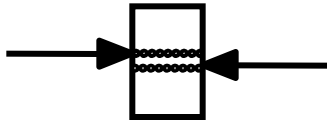
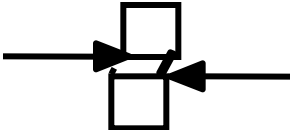
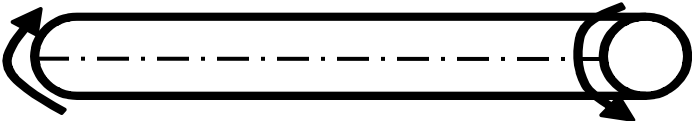
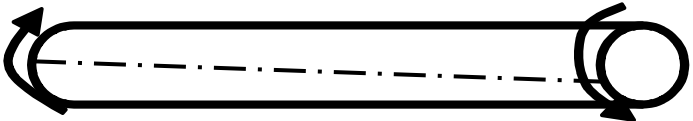
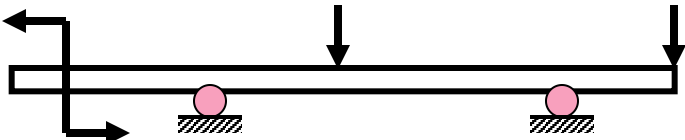
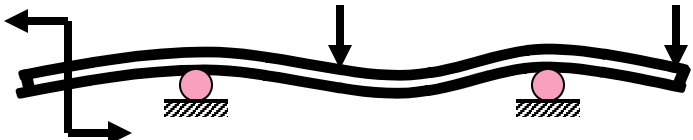
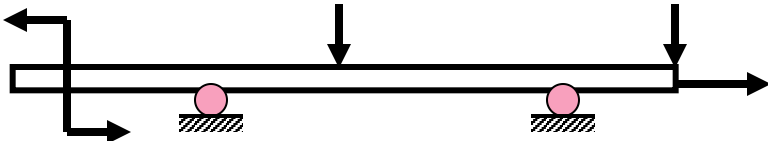


薄壁结构

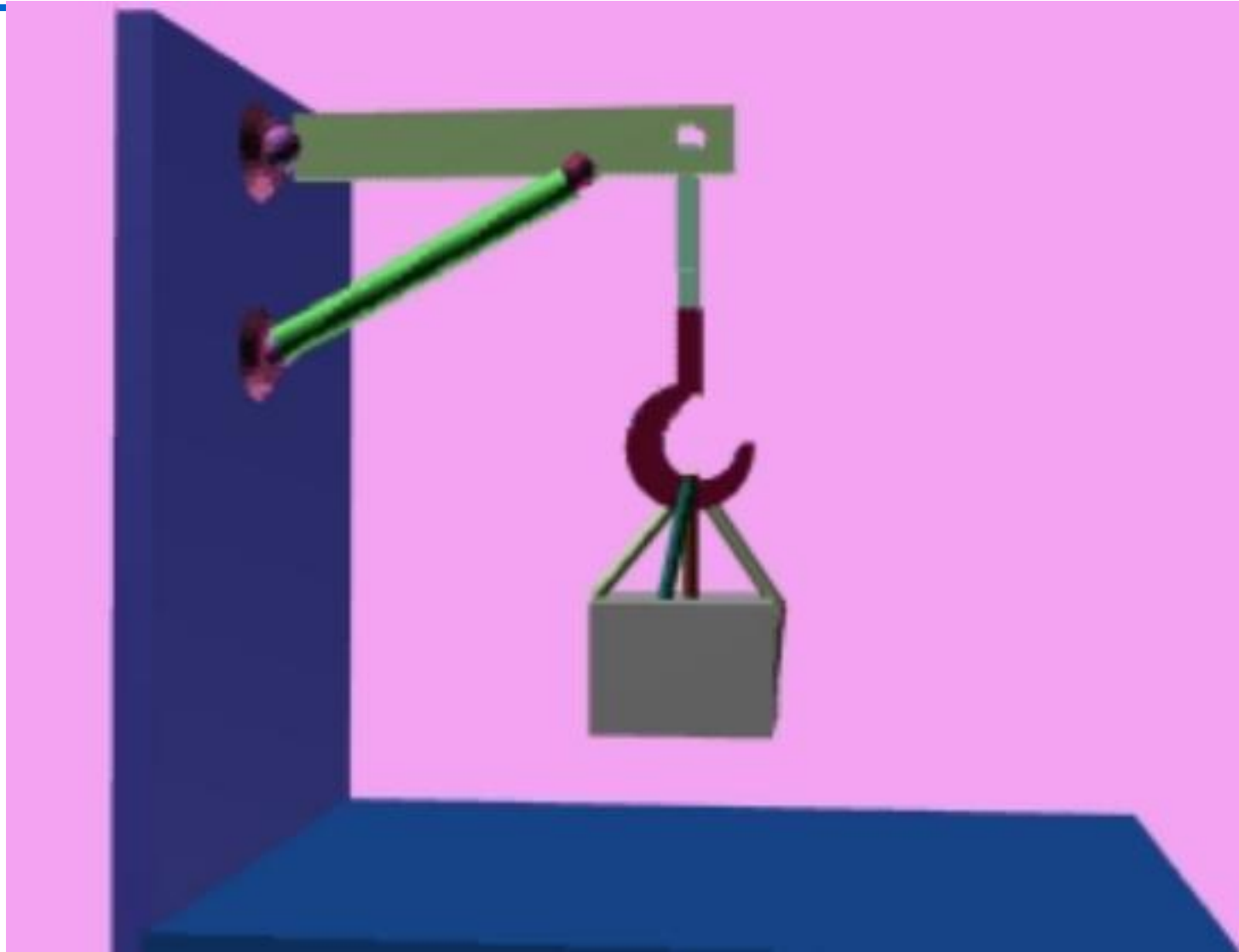


实体结构

杆件变形的基本形式

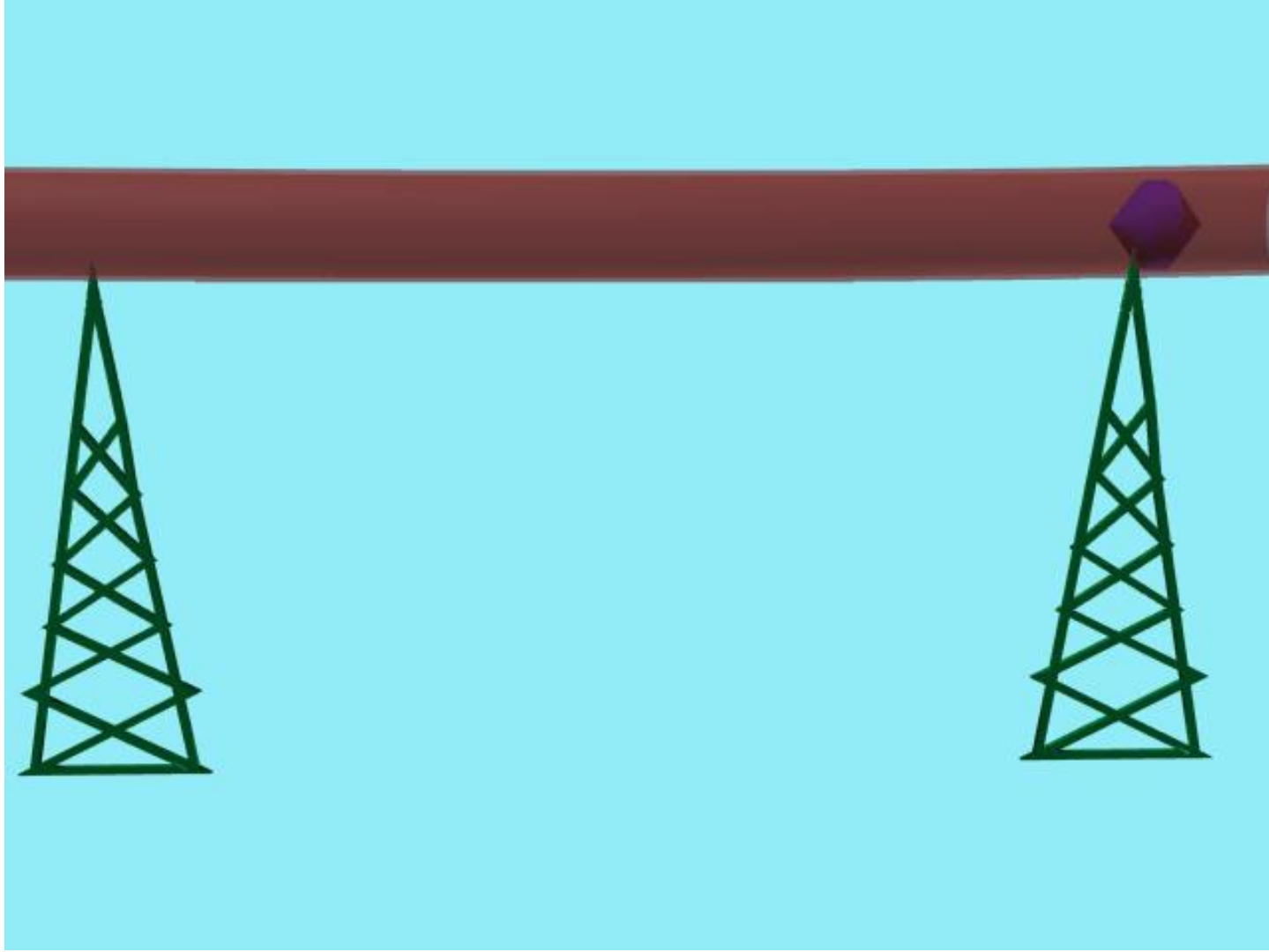
内容 种类	外力特点	变形特点
轴向拉伸 及 压缩		
剪切		
扭转		
平面弯曲		
组合受力与变形		

强度 构件抵抗破坏的能力



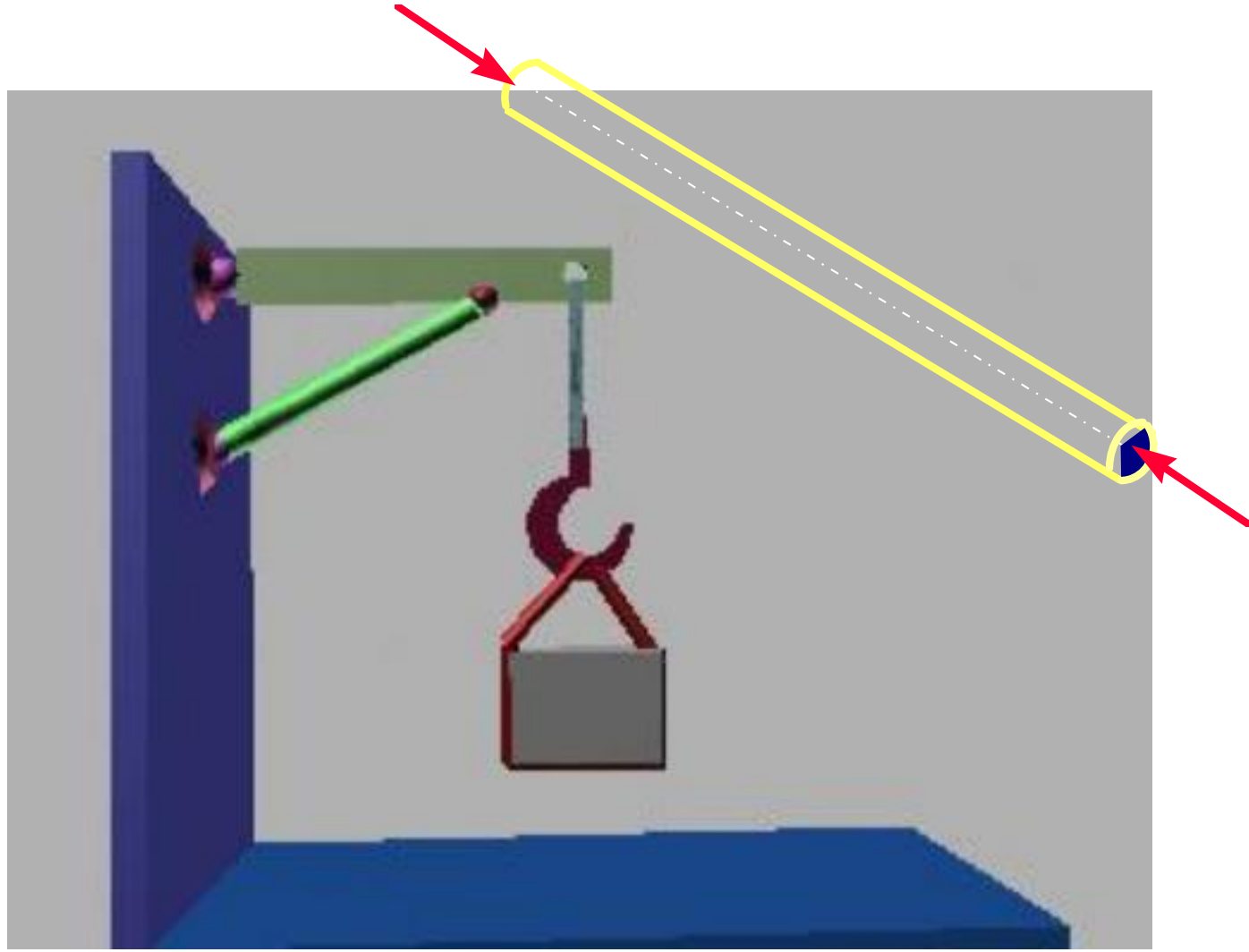
刚度

构件抵抗变形的能力



稳定性

构件保持原有平衡状态的能力



弹性力学的研究对象

弹性力学是干什么的？

弹性力学是研究弹性体在外界因素（外力作用温度变化、边界约束等）影响下，其内部所产生的应力、形变和位移的学科。

弹性体：仅有弹性性质的一种理想物体。

弹性性质

物体的应力和应变之间有着——对应的关系，且当外作用除去后，物体可恢复原状的特性。

弹性力学的研究对象

❖ 研究对象

板、壳、地基、堤坝和挡土墙等**实体结构**，以及对杆件结构做更为严密精确的研究。

❖ 研究任务

分析各种结构物或其构件在**弹性阶段**的**应力**和**位移**，校核它们是否具有所需的**强度、刚度和稳定性**，寻求或改进它们的计算方法, 采取**最优化**的方案解决**安全与经济的矛盾**。



弹性力学与材料力学的区别

1、研究的对象

材料力学基本上只研究杆、梁、柱、轴等杆状构件，即长度远大于宽度和厚度的构件。弹性力学虽然也研究杆状构件，但还研究材料力学无法研究的板与壳及其它实体结构，即两个尺寸远大于第三个尺寸，或三个尺寸相当的构件。

2、研究的范围

弹性力学只研究弹性体和物体的弹性阶段；而材料力学还研究物体的塑性阶段，包括蠕变、疲劳等方面的问题。

3、研究的方法

材料力学对应力分布或形变状态做一些近似假设，所得结果往往是近似的、初等的，限于一定条件下应用；而弹性力学则从基本假设出发，对物体的应力变形进行精确分析，所得结果更为精确，可用来校核材力结果。



弹性力学的基本假设

五个基本假设：

- 1) 连续性
- 2) 完全弹性
- 3) 均匀性
- 4) 各向同性
- 5) 小变形

引入假设的主要目的在于希望能利用数学工具来研究弹性力学。



弹性力学的基本假设

1) 连续性假设

- 从宏观上认为物体是连续的，则所有物理量如应力、应变和位移都可为坐标的连续函数，从而在数学推导时可利用连续和极限的概念，采用微积分、微分方程、微分几何、积分方程、变分等数学工具对弹性力学进行研究。

2) 线性完全弹性假设

- 当使物体产生变形的外力被除去以后，物体能够完全恢复原形，而不留任何残余变形。这样，当温度不变时，物体在任一瞬时的形状完全决定于它在这一瞬时所受的外力，与它过去的受力情况无关。
- 线性弹性：比例极限以下
- 完全弹性：弹性极限以下
- 该假定使本构关系（物理方程）成线性方程。
- 脆性材料的物体，在应力未超过比例极限以前，可作为近似的完全弹性体。塑性材料的物体，在应力未超过屈服极限以前，可作为近似的完全弹性体。



弹性力学的基本假设

3) 均匀性假设

- 整个物体是由同一种材料组成的。这样，整个物体的所有各部分才具有相同的物理性质，因而物体的弹性常数(弹性模量和泊松系数)才不随位置坐标而变，可取该物体中**任一小部分**来分析，然后把分析结果应用于整个物体。

4) 各向同性假设

- 物体内每一点各个不同方向的物理性质和机械性质都是相同的。物体的弹性在各方向相同，弹性常数等物理量不随方向变化。

5) 小变形假设

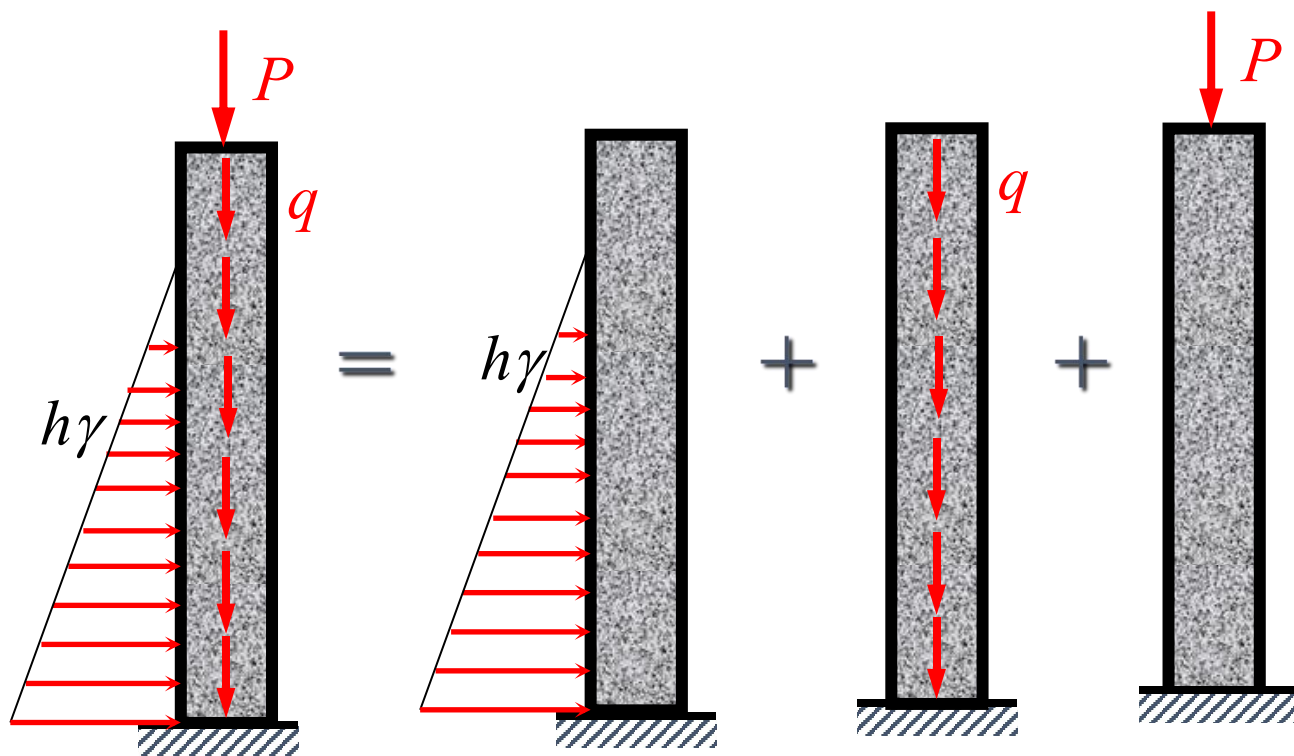
- 当物体受力以后，整个物体所有各点的位移都远小于物体的原有尺寸，因而应变和转角都远小于1，这样，在考虑物体变形以后的平衡状态时，可以用变形前的尺寸来代替变形后的尺寸，而不致有显著的误差；并且，在考虑物体的变形时，应变和转角的平方项或乘积项都可以略去不计，这就使得弹性力学中的微分方程都成为线性方程。



弹性力学的基本假设

在连续性、完全弹性、均匀性、各向同性和小变形假定下，弹性力学问题化为线性问题，可应用叠加原理。

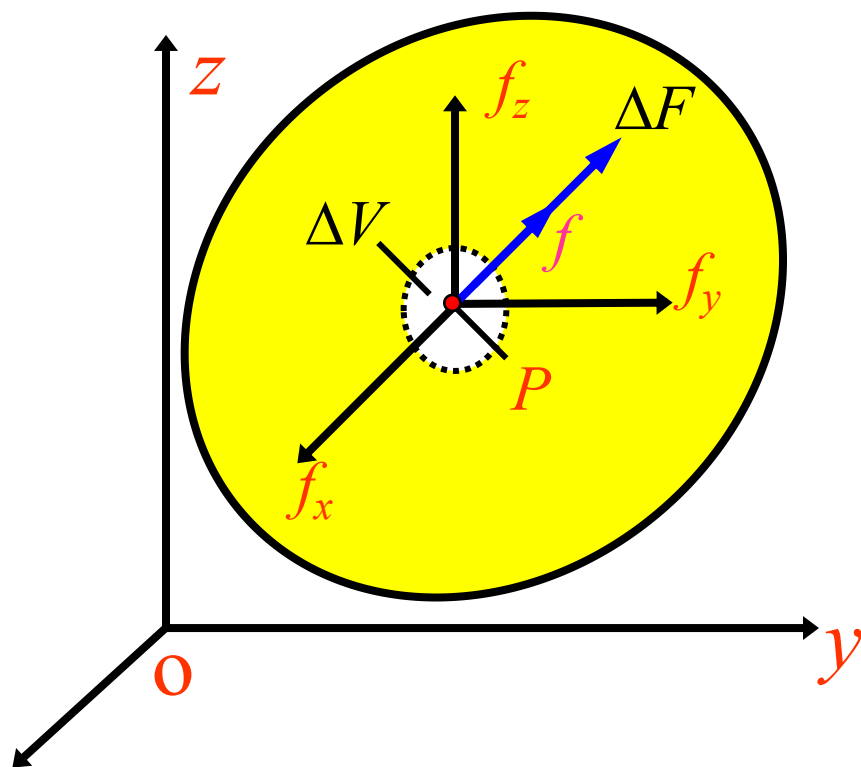
叠加原理：在线弹性(物理线性)和小变形（几何线性）情况下，作用于物体上几组荷载产生的应力和变形的总效应，等于每组荷载单独作用效应的总和。



弹性力学的基本概念

1) 外力 (体力和面力)

- 定义：其它物体对研究对象（弹性体）的作用力。
- **体力**：分布在物体体积内的力，如重力、惯性力和电磁力等。



以单位体积内所受的力来量度：

$$f = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta V}$$

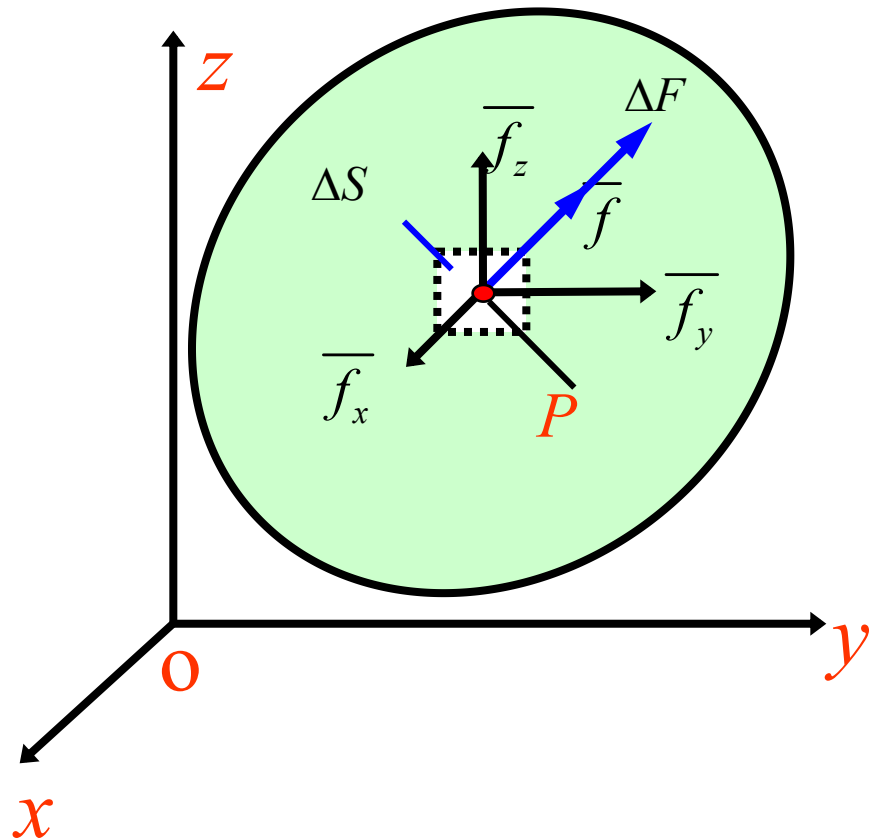
矢量 f 方向沿 ΔF 的极限方向

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}$$

符号：坐标正向为正。

弹性力学的基本概念

➤ **面力**: 分布在物体表面的力, 如流体压力和接触力等。



以单位面积所受的力来量度:

$$\bar{f} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

矢量 $\bar{f}$ 方向沿 ΔF 的极限方向

$$\bar{f} = \sqrt{\bar{f}_x^2 + \bar{f}_y^2 + \bar{f}_z^2}$$

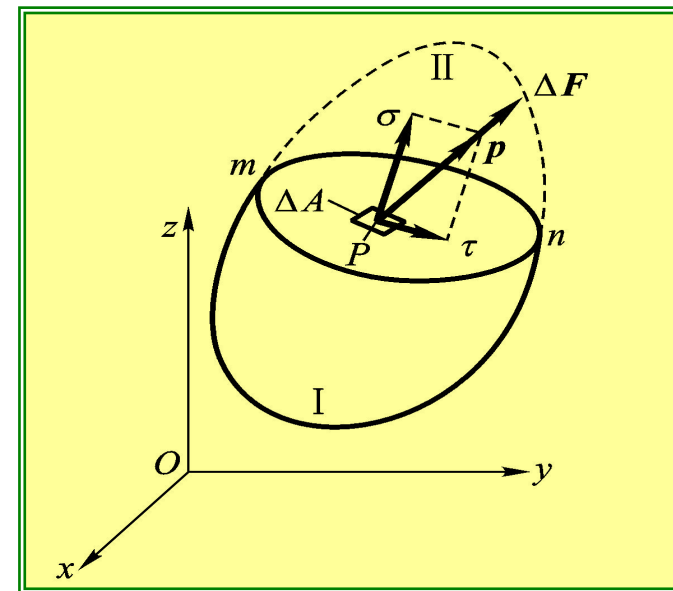
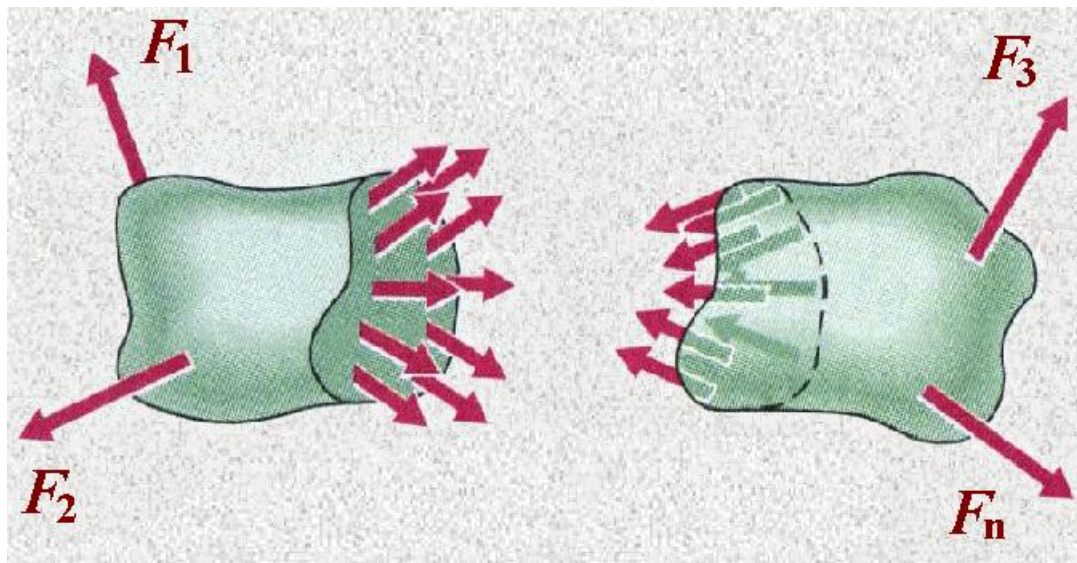
符号: 坐标正向为正。

体力和面力均表示单位体积、面积上的作用力, 所以考虑平衡条件求合力时, 须乘以相应的体积和面积。

弹性力学的基本概念

2) 内力

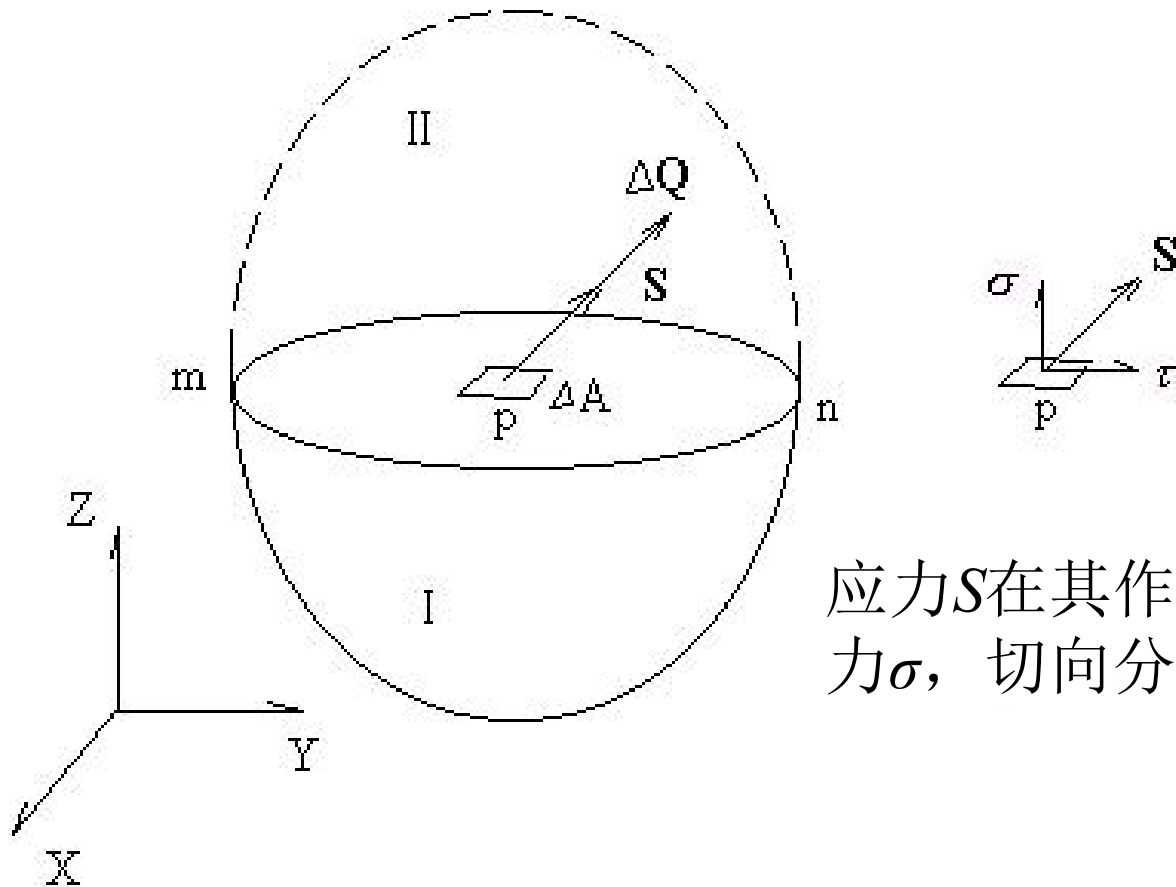
- 定义：物体本身不同部分之间相互作用的力。



假想切开物体，截面两边互相作用的力（合力和合力矩），就是内力。

3) 应力

- 定义：截面上某一点处，单位截面面积上的内力值。



应力 S 在其作用截面上的法向分量为正应力 σ ，切向分量称为剪应力，用 τ 表示。

弹性力学的基本概念

一点应力的要素:

大小

方向

作用点

作用面



$$\sigma = \frac{N}{A}$$

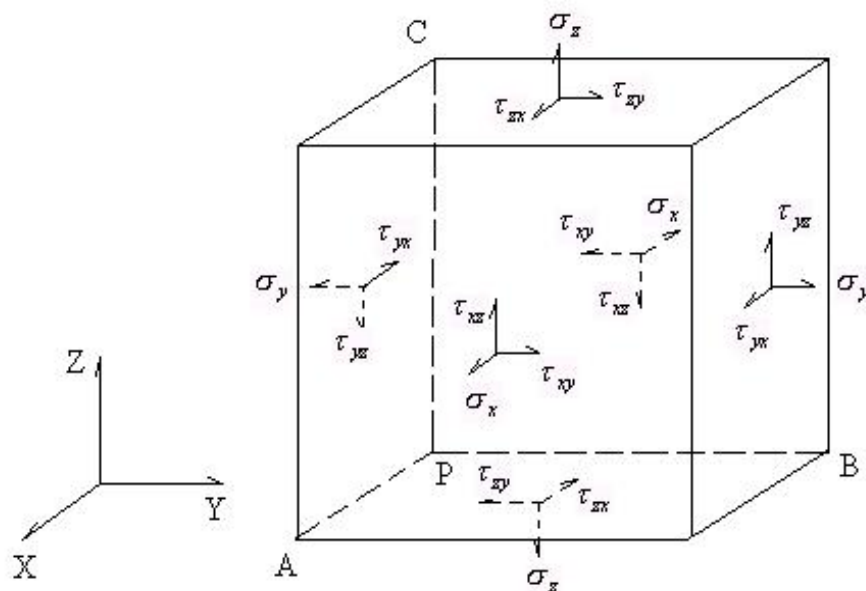


$$\sigma = \frac{N \sin \theta}{A} \sin \theta$$

$$\tau = \frac{N \sin \theta}{A} \cos \theta$$

显然，点p在不同截面上的应力是不同的。为分析点p的应力状态，即通过p点的各个截面上的应力的大小和方向，在p点取出的一个无穷小平行六面体。用六面体表面的应力分量来表示p点的应力状态。

一点的应力状态



经过物体任一点如P点取出一个微小的正六面体，它的棱边分别平行于三个坐标轴而长度分别为： $PA = \Delta x, PB = \Delta y, PC = \Delta z$ 。将每个面上的应力分解为一个正应力和两个切应力。正应力用 σ 表示，切应力用 τ 表示。

❖ 应力下标的含意：

$\tau_{ij}(i, j = x, y, z)$

A. 作用面的外法线方向

B. 力的指向

A. 作用面的外法线方向

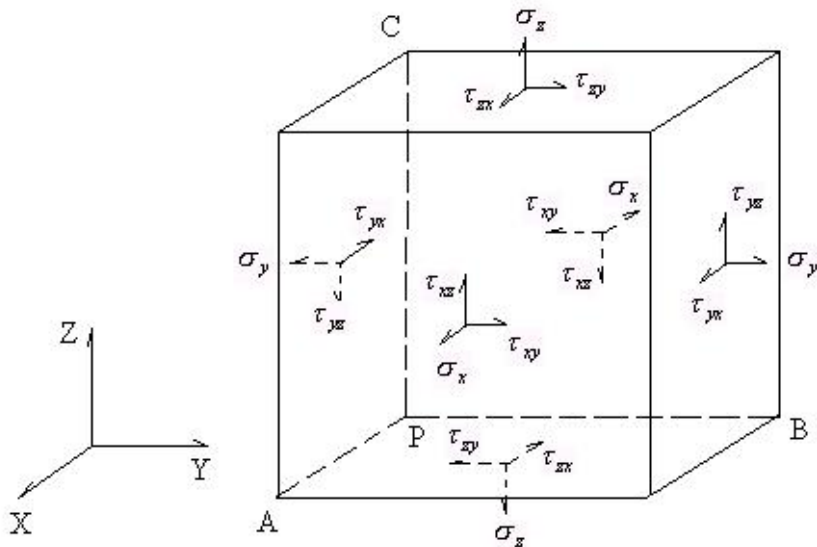
B. 力的指向

$\sigma_i(i = x, y, z) \rightarrow \sigma_{ii}$

一点的应力状态

应力的正负

- 如果某一个面上的外法线是沿着坐标轴的正方向，这个面上的应力就以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。
- 相反，如果某一个面上的外法线是沿着坐标轴的负方向，这个面上的应力就以沿坐标轴的负方向为正，沿坐标轴正方向为负。

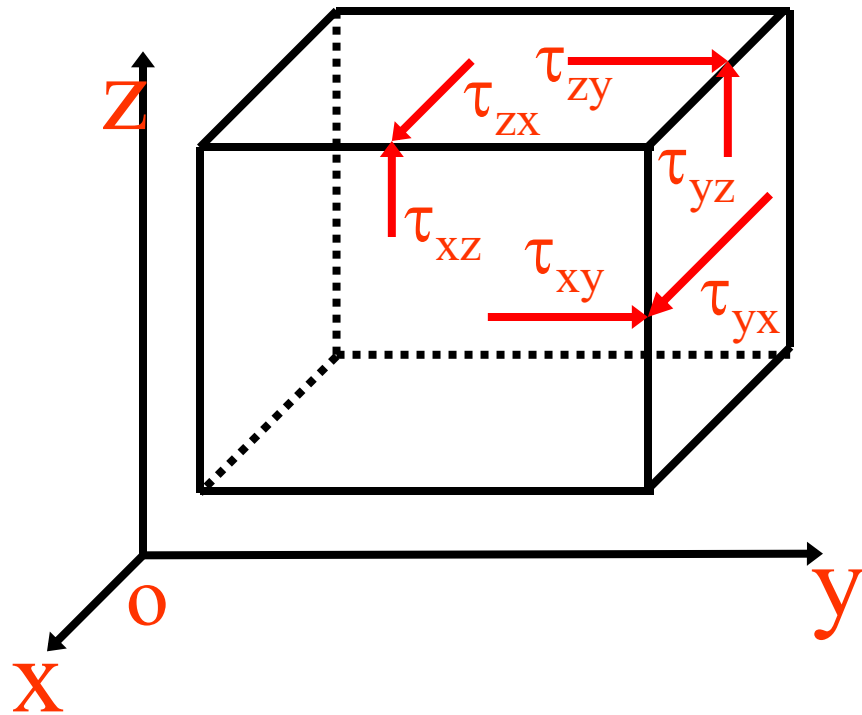


截面两侧的物体上内力和应力都是成对出现的，且数值相等，方向相反（作用力与反作用力），采取上述规定则截开的两部分遵守同一的规定。

- **材料力学**： 截面上的剪应力对截面上任意一点的矩为顺时针转向时，剪应力为正；反之为负。

切应力互等定理

在受力物体相互垂直的两个平面上，切应力必然成对存在，且数值相等；两者都垂直于两平面的交线，方向共同指向或背离这一交线。



弹力规定

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

材力规定

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = -\tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = -\tau_{zy}$$

可以证明：如果 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 这六个量在P点是已知的，就可以求得经过该点的任何面上的正应力和剪应力，因此，这六个量可以完全确定该点的应力状态，它们就称为在该点的应力分量。

一般说来，弹性体内各点的应力状态都不相同，因此，描述弹性体内应力状态的上述六个应力分量并不是常量，而是坐标 x 、 y 、 z 的函数。

六个应力分量的总体，可以用一个列矩阵 σ 来表示：

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \left\{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \right\}^T$$

4) 位移和应变

弹性体在受外力以后，还将发生变形。物体的变形状态，一般有两种方式来描述：

- 1、给出各点的位移；
- 2、给出各体素的变形。

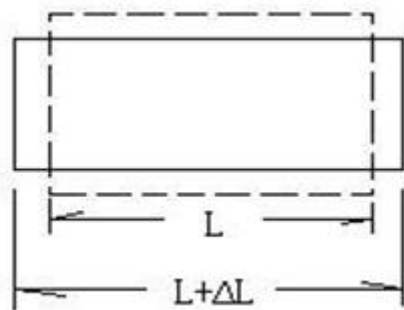
弹性体内任一点的位移，用此位移在 x 、 y 、 z 三个坐标轴上的投影 u 、 v 、 w 来表示。以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。这三个投影称为位移分量。一般情况下，弹性体受力以后，各点的位移分为两类：形变有关的位移和与形变无关位移（刚体位移）。

体素的变形可以分为两类：一类是长度的变化，一类是角度的变化。

弹性力学中的基本概念

任一线素的长度的变化与原有长度的比值称为线应变(或称正应变), 用符号 ε 来表示。沿坐标轴的线应变, 则加上相应的角码, 分别用 ε_x 、 ε_y 、 ε_z 来表示。当线素伸长时, 其线应变为正。反之, 线素缩短时, 其线应变为负。这与正应力的正负号规定相对应。

任意两个原来彼此正交的线素, 在变形后其夹角的变化值称为角应变或剪应变, 用符号 γ 来表示。两坐标轴之间的角应变, 则加上相应的角码, 分别用 γ_{xy} 、 γ_{yz} 、 γ_{zx} 来表示。规定当夹角变小时为正, 变大时为负, 与剪应力的正负号规定相对应。



两种平面问题

弹性力学可分为空间问题和平面问题，严格地说，任何一个弹性体都是空间物体，一般的外力都是空间力系，因而任何实际问题都是空间问题，都必须考虑所有的位移分量、应变分量和应力分量。但是，如果所考虑的弹性体具有特殊的形状，并且承受的是特殊外力，就有可能把空间问题简化为近似的平面问题，只考虑部分的位移分量、应变分量和应力分量即可。

平面问题分为两类：

- 平面应力问题
- 平面应变问题



平面应力问题

什么样的问题可简化为平面应力问题？

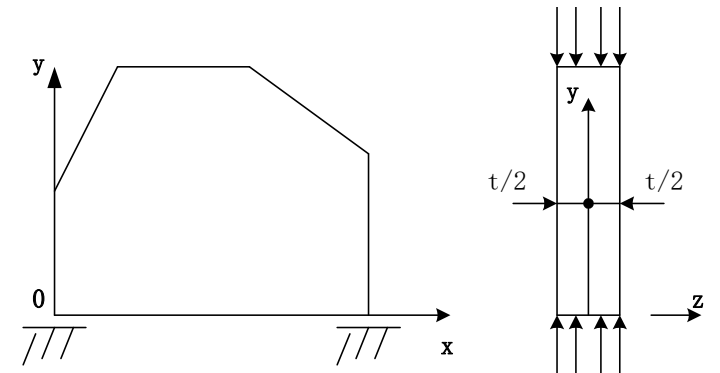
- (1) 等厚度的薄板；
- (2) 体力作用于体内，平行于板的中面，沿板厚不变；
- (3) 面力作用于板边，平行于板的中面，沿板厚不变；
- (4) 约束作用于板边，平行于板的中面，沿板厚不变。

几何特征

一个方向的尺寸比另外两个方向小得多； $t \ll a$, $t \ll b$.

受力特征

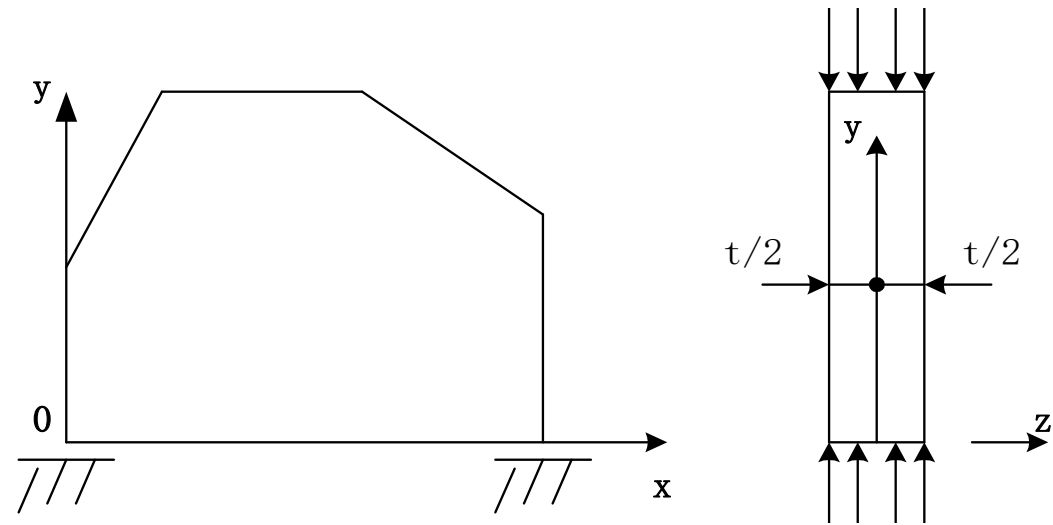
外力（**体力和面力**）和约束，只平行于板平面作用，沿板厚不变化。



平面应力问题

坐标系如图选择：

以薄板的中面为 xy 面，以垂直于中面的任一直线为 z 轴。由于薄板两表面上没有垂直和平行于板面的外力，所以板面上各点均有：



$$(\sigma_z)_{z=\pm\frac{t}{2}} = 0, \quad (\tau_{zx})_{z=\pm\frac{t}{2}} = 0, \quad (\tau_{zy})_{z=\pm\frac{t}{2}} = 0$$

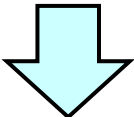
另外由于平板很薄，外力又不沿厚度变化，可认为在整个薄板内各点均有：

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$$

于是，在六个应力分量中，只需要研究剩下的平行于 XOY 平面的三个应力分量，即 σ_x 、 σ_y 、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ，所以称为平面应力问题。

平面应力问题

应力矩阵

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \cancel{\sigma_z} \\ \tau_{xy} \\ \cancel{\tau_{yz}} \\ \cancel{\tau_{zx}} \end{Bmatrix} = \left\{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \cancel{\sigma_z} \quad \tau_{xy} \quad \cancel{\tau_{yz}} \quad \cancel{\tau_{zx}} \right\}^T$$


$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \left\{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \right\}^T$$

由于物体形状、外力和约束沿 z 向均不变化，应力分量和应变分量均只是 x, y 的函数。

平面应变问题

什么样的问题可简化为平面应变问题？

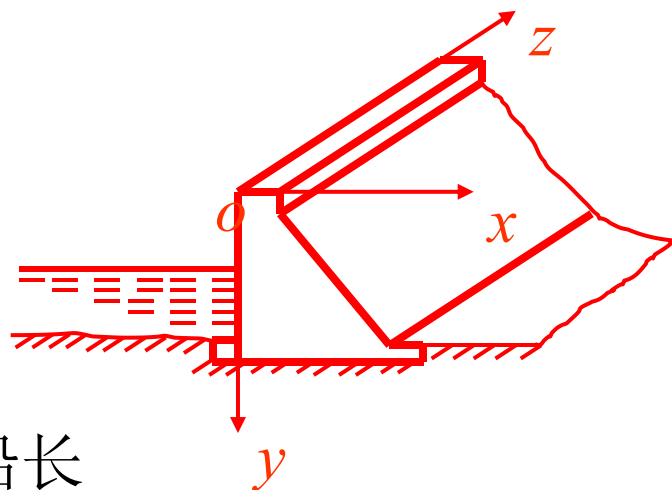
- (1) 很长的常截面柱体；
- (2) 体力作用于体内，平行于横截面，沿柱体长度方向不变；
- (3) 面力作用于柱面，平行于横截面，沿柱体长度方向不变；
- (4) 约束作用于柱面，平行于横截面，沿柱体长度方向不变。

几何特征

一个方向的尺寸比另外两个方向大得多； $L \gg a$, $L \gg b$.

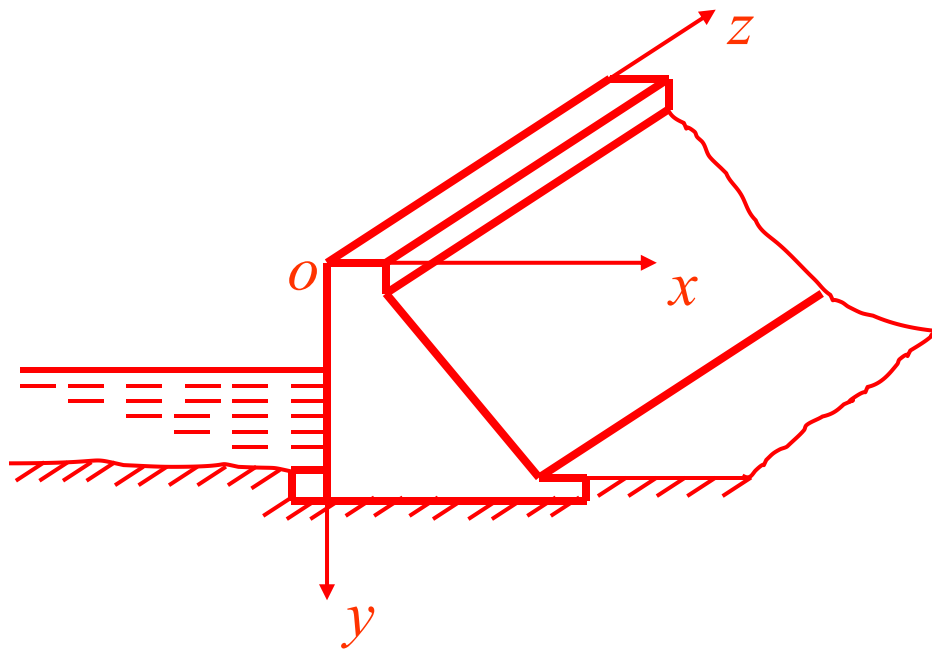
受力特征

外力（体力和面力）和约束，只平行于横截面作用，沿长度方向不变化。



平面应变问题

由于物体的纵向很长(在力学上可近似地作为无限长考虑), 截面尺寸与外力又不沿长度变化; 当以任一横截面为 xy 面, 任一纵线为 z 轴时, 则所有一切应力分量、应变分量和位移分量都不沿 z 方向变化, 它们都只是 x 和 y 的函数。



此外, 在这一情况下, 由于对称(任一横截面都可以看作对称面), 所有各点都只会有 x 和 y 方向的位移而不会有 z 方向的位移, 即 $w = 0$, 因此, 这种问题称为平面位移问题, 但习惯上常称为平面应变问题。

显然, 对于平面应变问题, $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$

平衡微分方程

平衡微分方程--表示物体任一点的微分体的平衡条件。

平面应力问题： z 面上的力以及指向与 z 轴平行的力均为零。

平面应变问题： z 面上的力只有 $\sigma_z \neq 0$ ， z 面上其它力以及其它指向与 z 轴平行的力均为零。

考虑平衡时，采用对 x 、 y 轴投影合力为零和以 z 面中点连线为轴求矩为零两条件。列这两种平衡方程时都不用考虑 σ_z ，故对于平衡问题平面应力和平面应变相同。

在取微元时令 z 向尺寸为一个单位长度即 $dz=1$ ，在任一点 (x, y)

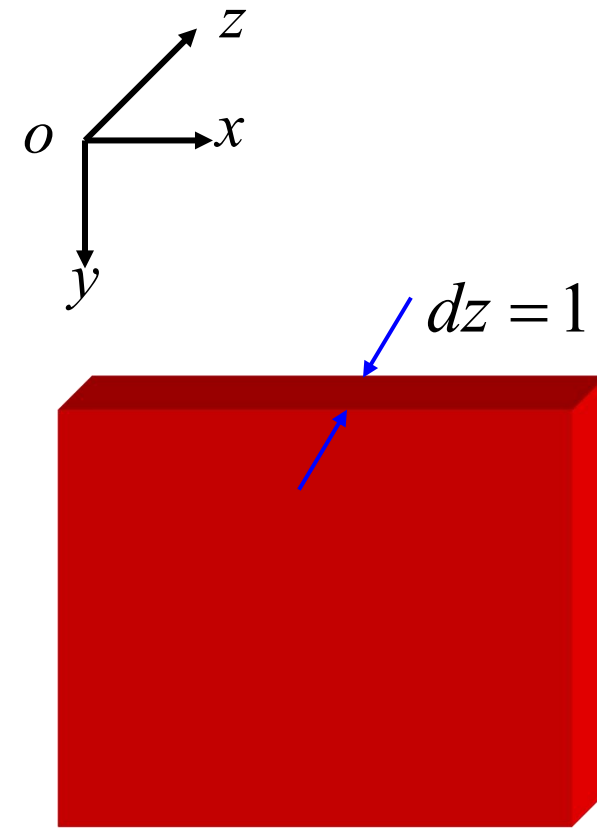
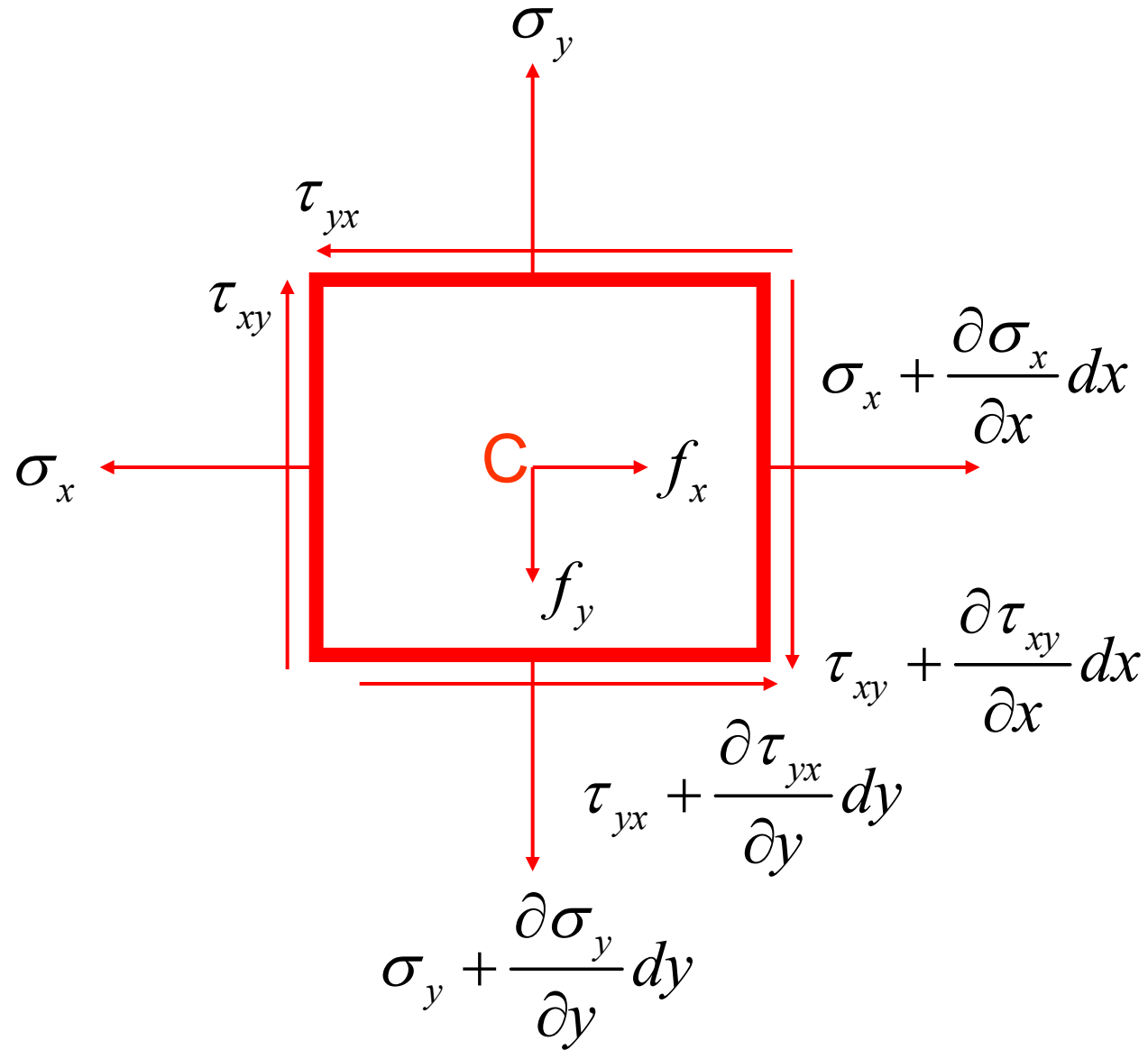
取出一微小的平行六面体 $dx \cdot dy \cdot 1$ ，则作用于微分体上的力：

体力： f_x, f_y ；

应力：作用于各边上，并表示出正面上由坐标增量引起的应力增量。



平衡微分方程



平衡微分方程

应用的基本假定：

连续性假定—应力用连续函数来表示。

小变形假定—用变形前的尺寸代替变形后的尺寸。

列出平衡条件：

合力 = 应力×面积，体力×体积；以正向物理量来表示。

平面问题中可列出3个平衡条件：

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_z = 0$$

为研究问题方便，对轴求矩时采用z面中点连线为轴。

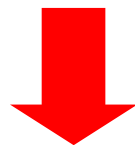
前两式可导出平面问题的两个平衡微分方程，后一式导出平面中的切应力互等关系。



平衡微分方程

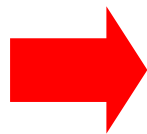
$$\sum F_x = 0$$

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + f_x dx dy dz = 0$$



$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$



$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0$$

} 平衡微分方程

平衡微分方程

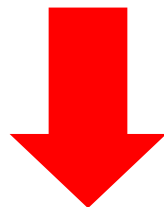
$$\sum M_C = 0$$

$$\left[\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dydz \frac{dx}{2} + \tau_{xy} dydz \frac{dx}{2} \right] - \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dxdz \frac{dy}{2} + \tau_{yx} dxdz \frac{dy}{2} \right] = 0$$



$$\tau_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx = \tau_{yx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$$

略去
微量



$$\begin{aligned} dx &\rightarrow 0 \\ dy &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$



对平衡微分方程的说明：

- (1) 代表问题域 Ω 中所有点的平衡条件，因为 $(x, y) \in \Omega$ ；
- (2) 适用的条件——连续性，小变形；
- (3) 应力不能直接求出；
- (4) 对两类平面问题的方程相同。
- (5) 理论力学、材料力学和弹性力学比较：

理论力学考虑整体 Ω 的平衡（只决定整体的运动状态）。

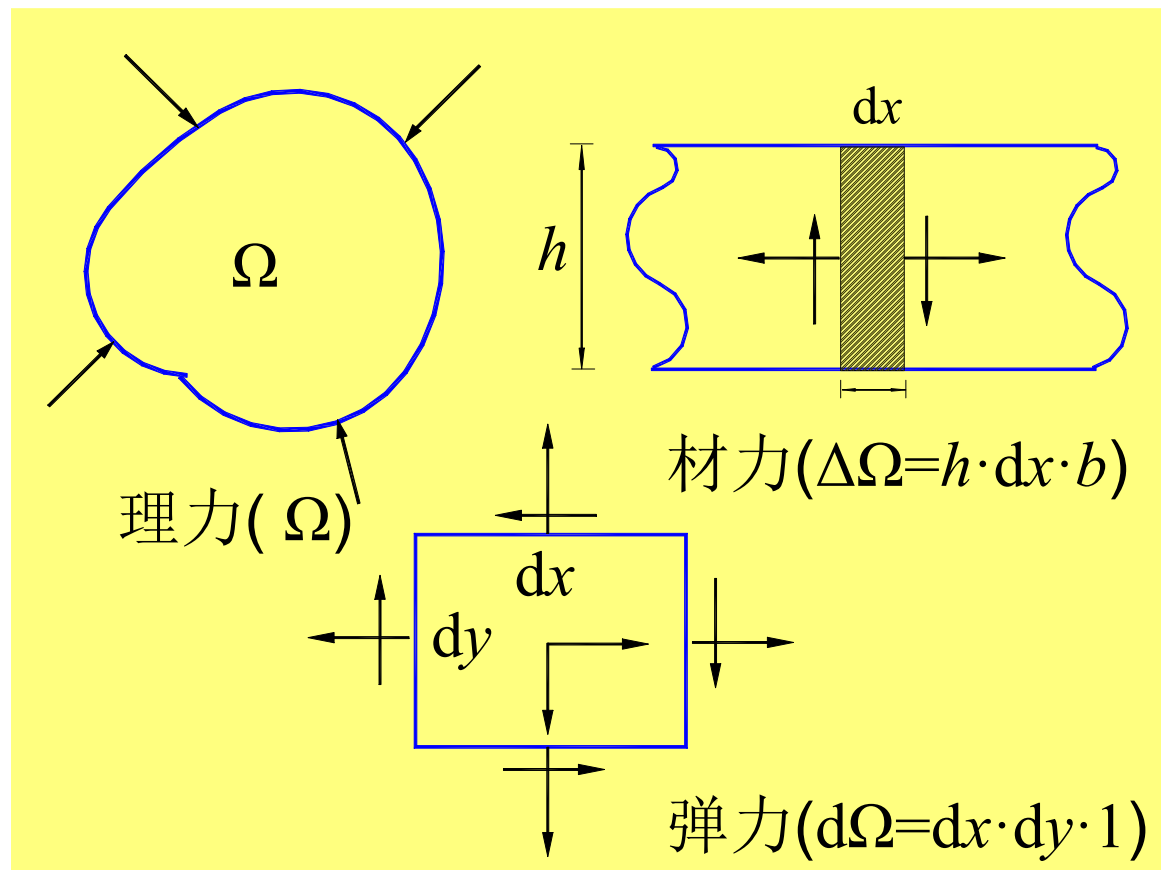
材料力学考虑有限体 $\Delta\Omega$ 的平衡（近似）。

弹性力学考虑微分体 $d\Omega$ 的平衡（精确）。

平衡微分方程

当 $d\Omega$ 均平衡时，保证 $\Delta\Omega$ ， Ω 平衡；反之则不然。

所以弹力的平衡条件是严格的，并且是精确的。



平面问题中一点的应力状态

问题的提出:

已知坐标面上应力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, 求斜面上的应力。

斜面应力表示: $\mathbf{p} = (p_x, p_y), \mathbf{p} = (\sigma_n, \tau_n)$.

求解: 取出一个三角形微分体(包含x面, y面, n面)

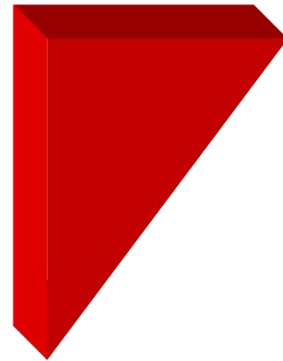
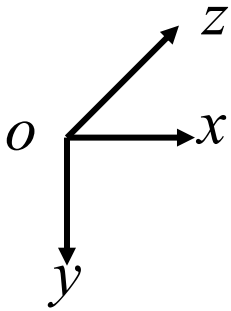
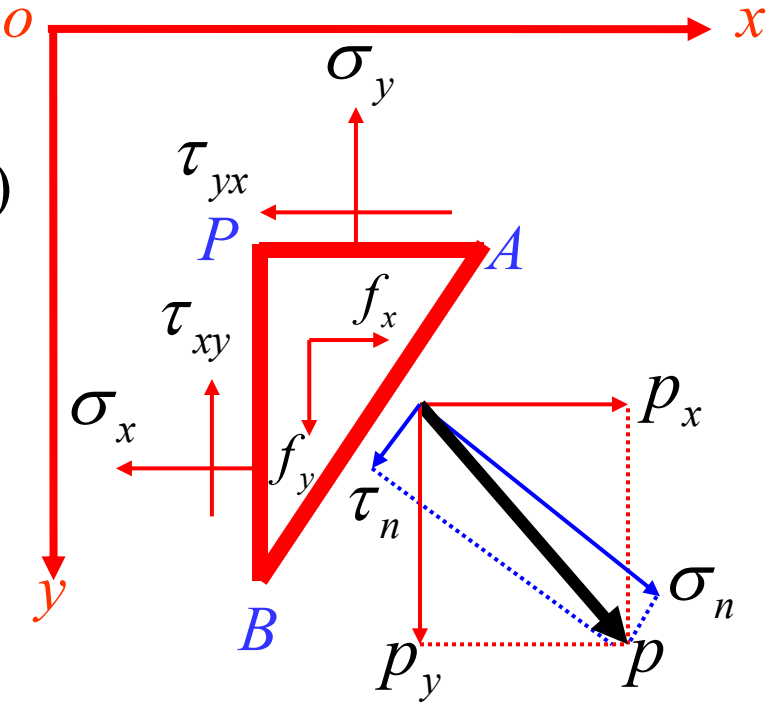
$f_x, f_y \rightarrow$ 三棱柱受到的体力分量

$l, m \rightarrow$ 斜面AB的方向余弦

$ds \rightarrow$ 斜面AB的长度

显然:

$$L_{PB} = lds \quad L_{PA} = mds \quad S_{\Delta PAB} = \frac{1}{2} lds mds$$



平面问题中一点的应力状态

$$\sum F_x = 0$$

$$p_x ds dz - \sigma_x l ds dz - \tau_{yx} m ds dz + f_x S_{\Delta PAB} dz = 0$$

$$p_x = l\sigma_x + m\tau_{yx} - f_x \frac{1}{2} l m ds$$

$$ds \rightarrow 0 \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$p_x = l\sigma_x + m\tau_{yx}$$

$$p_y = m\sigma_y + l\tau_{xy}$$

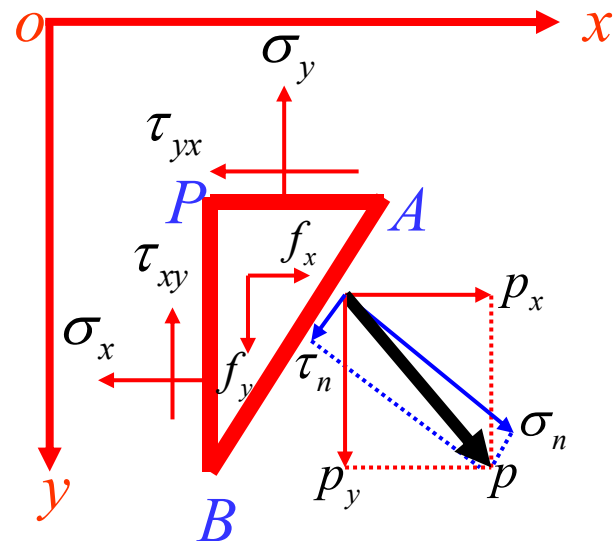
$$\sum F_y = 0$$

$$\sigma_n = lp_x + mp_y$$

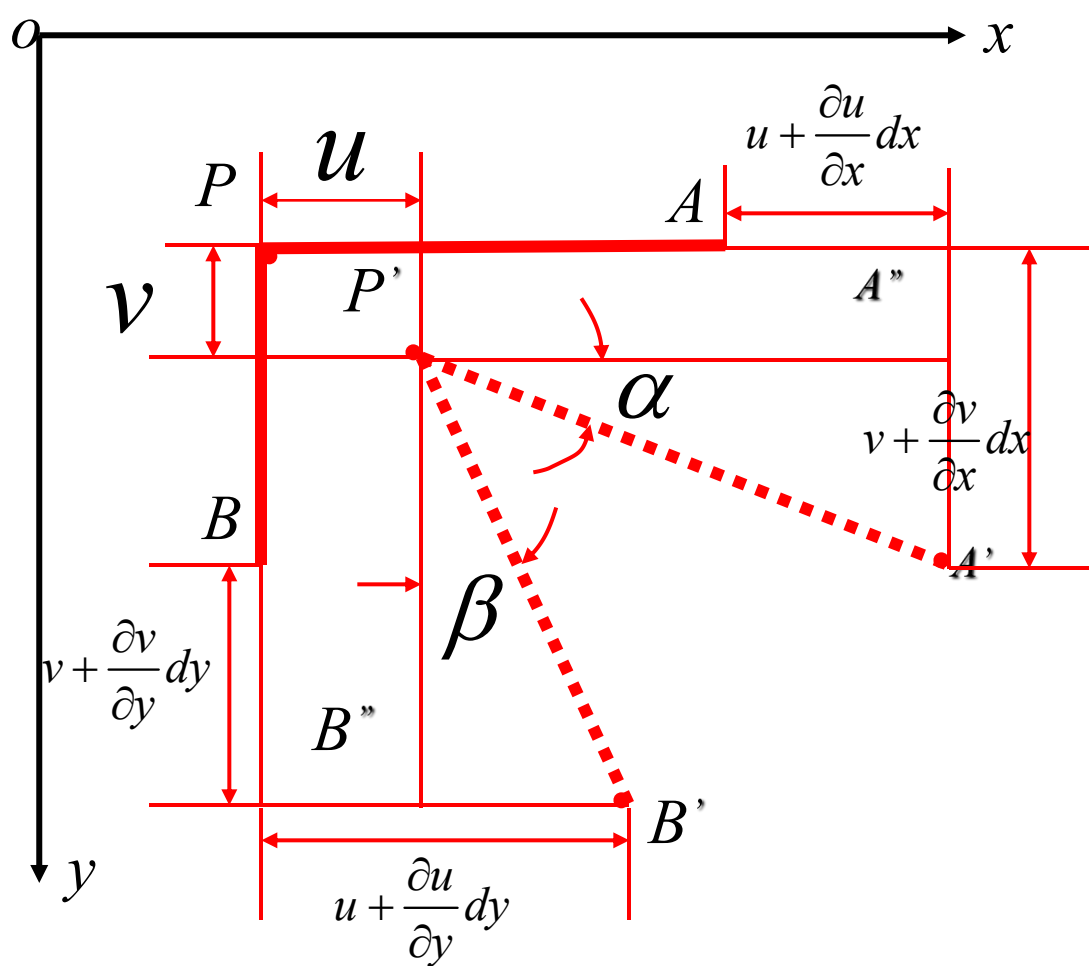
$$\tau_n = lp_y - mp_x$$

$$\sigma_n = l^2 \sigma_x + m^2 \sigma_y + 2lm\tau_{xy}$$

$$\tau_n = lm(\sigma_y - \sigma_x) + (l^2 - m^2)\tau_{xy}$$



几何方程——表示任一点的微分上形变与位移之间的关系。



P 点在 x 方向的位移分量为 u ;

A 点在 x 方向的位移:

$$u + \Delta u = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

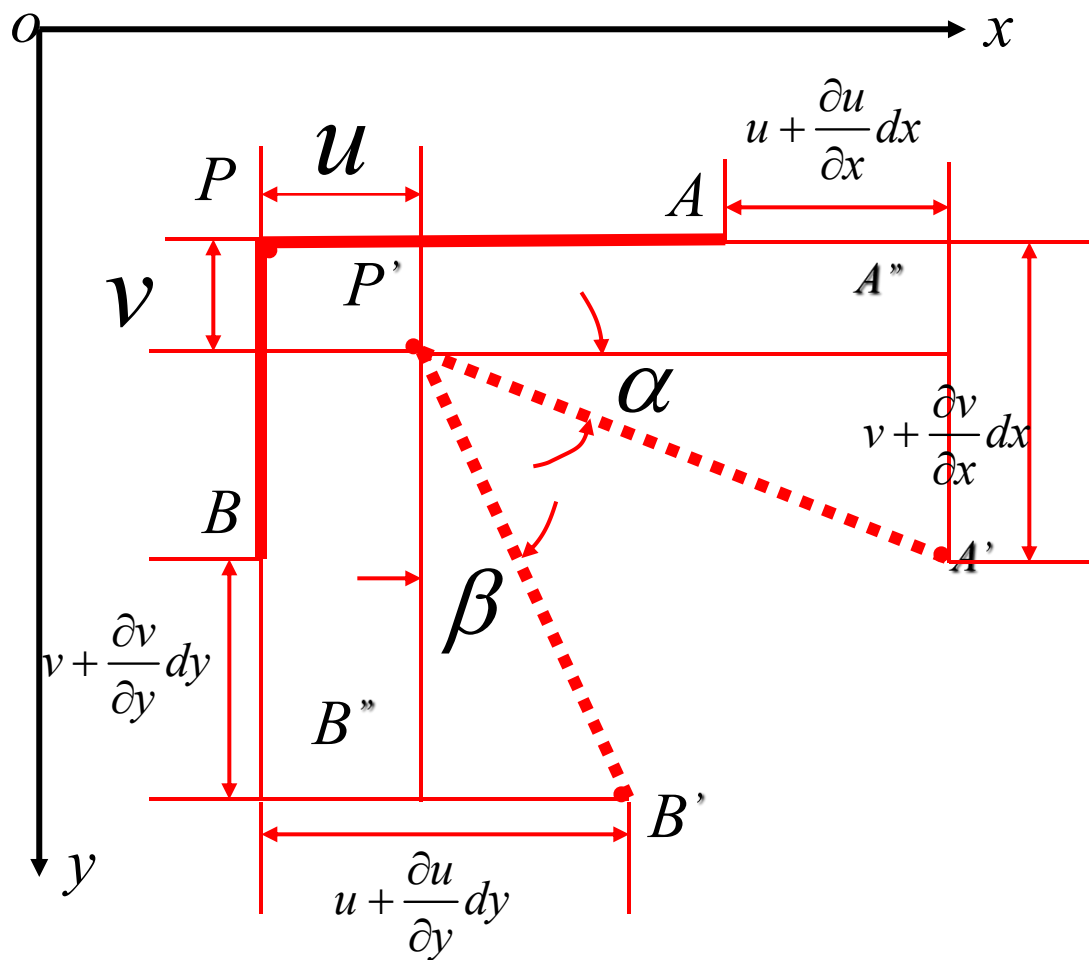
线素 PA 的正应变为:

$$\varepsilon_x = \frac{(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

同理, PB 的正应变为:

$$\varepsilon_y = \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy) - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

求剪应变 γ_{xy} ，也就是线素PA与PB的之间直角的改变



P点在y方向的位移分量为v;

A点在x方向的位移:

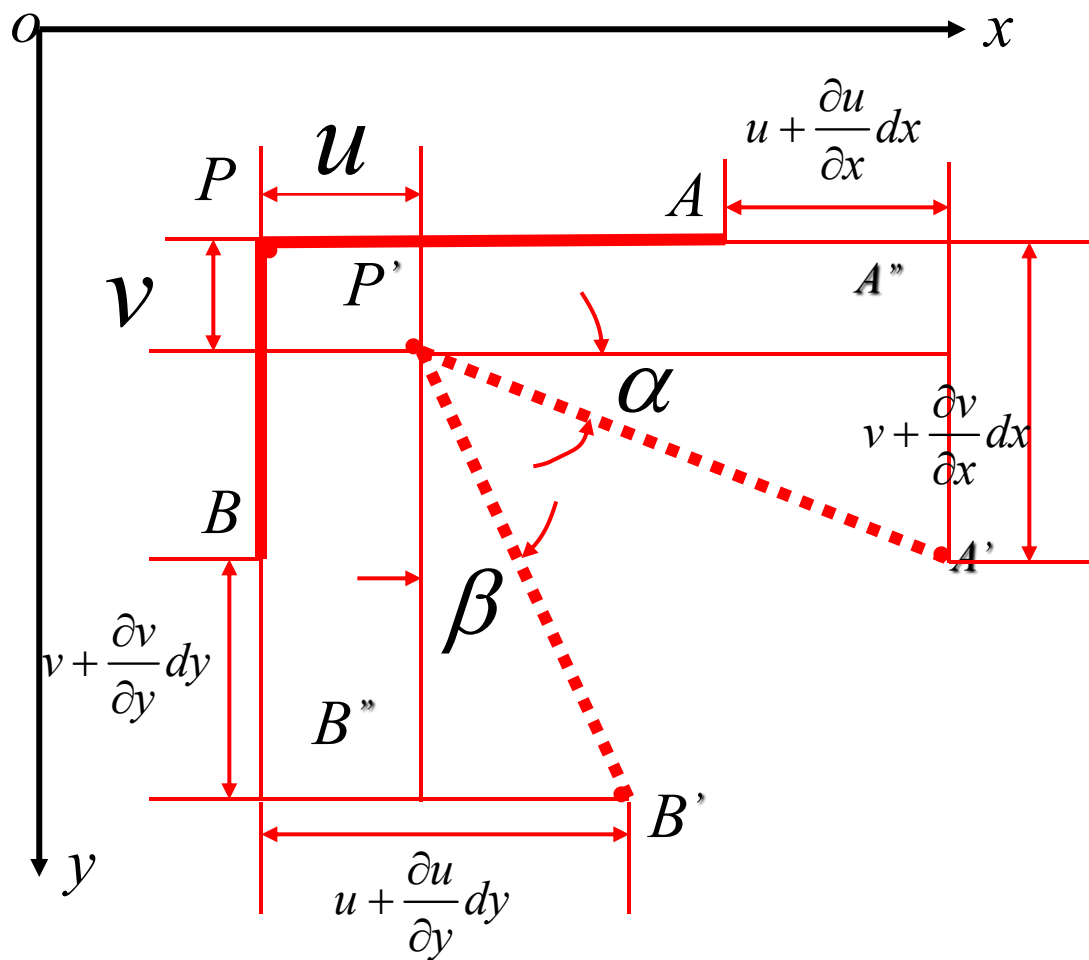
$$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

引入小变形假设线素PA的转角为:

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{A'A''}{P'A''}$$

$$= \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx) - v}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}$$

求剪应变 γ_{xy} ，也就是线素PA与PB的之间直角的改变



由于变形是微小的，所以上式
可将比单位值小得多的 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 略
去，得：

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}$$

同理，线素PB的转角为：

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial y}$$

因此，剪应变为：

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

所以平面问题的几何方程为：

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

对几何方程的说明：

- (1) 适用于区域内任何点，因为 $(x, y) \in \Omega$;
- (2) 应用小变形假定，略去了高阶小量，几何方程仅适用于线性小变形问题；
- (3) 几何方程是变形后物体连续性条件的反映和必然结果；
- (4) 形变和位移之间的关系：**位移确定→形变完全确定：**

从物理概念看，各点的位置确定，则微分线段上的形变确定。从数学推导看，位移函数确定，则其导数（形变）确定。

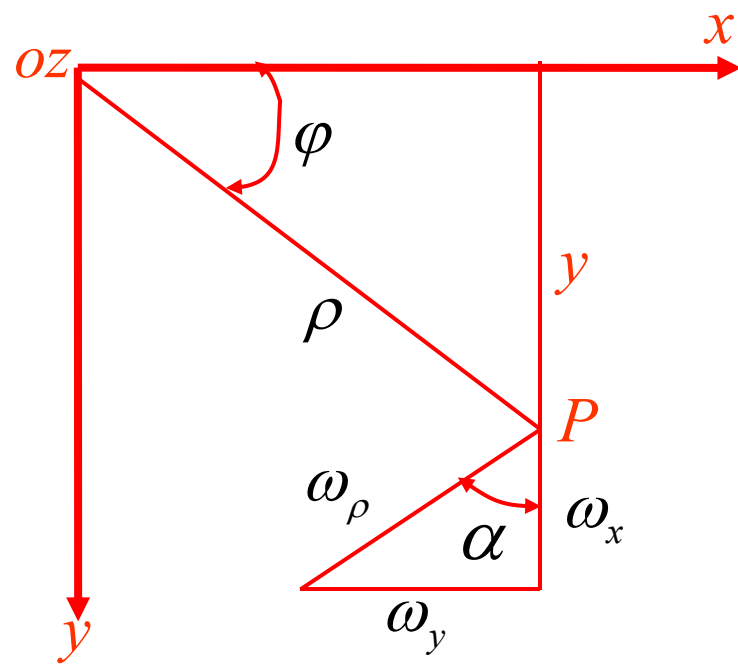
前面说过，当弹性体的位移分量完全确定时，应变分量是完全确定的。反过来，当应变分量完全确定时，位移分量却不完全确定；从物理概念看，具有确定形状的物体，可能发生不同的刚体位移；从数学推导看，应变分量确定，求位移是积分运算，出现待定函数。为了说明这一点，试令 $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$

$$\text{则有: } \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\text{积分后, 得 } \left. \begin{aligned} u &= u_0 - \omega y \\ v &= v_0 + \omega x \end{aligned} \right\}$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

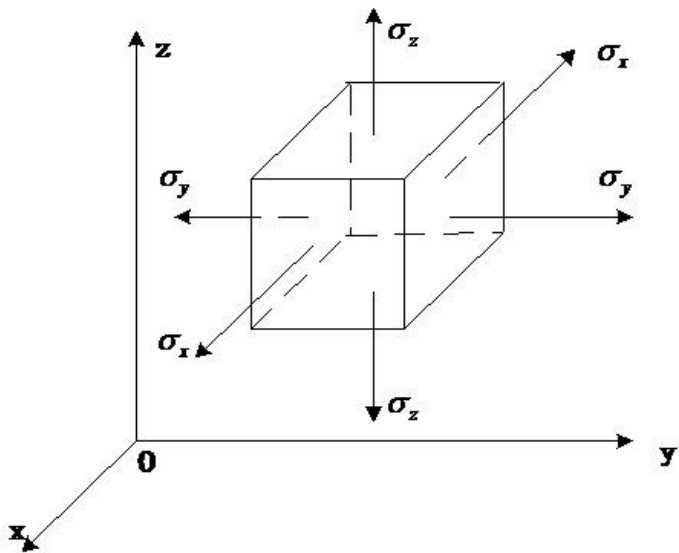
u_0, v_0 : 刚体位移; ω : 绕 z 轴的转动角度。



结论：当形变确定时，与形变有关的位移可确定；与形变无关的刚体位移尚未确定，需通过边界上的约束条件才能确定。

应力应变关系，物理方程

物理方程——表示（微分体上）应力和形变之间的物理关系，即广义虎克定律。



回顾一下材料力学中推导过程：

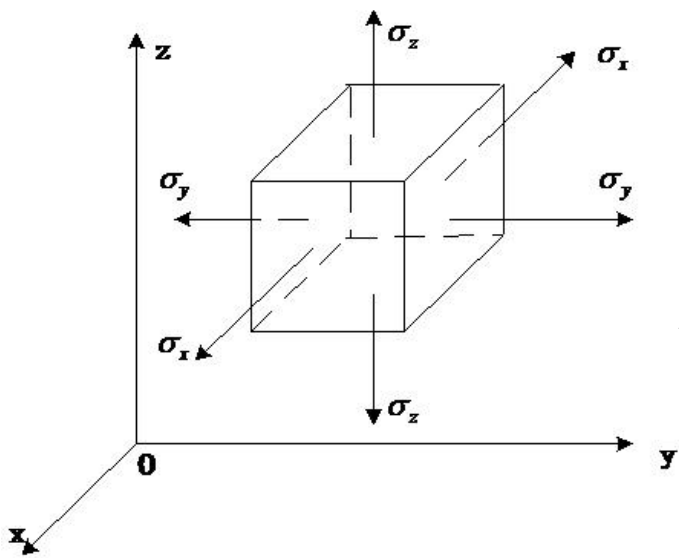
当沿x轴方向的两个对面受有均匀分布的正应力时，在满足先前假定的材料性质条件下，正应力不会引起角度的任何改变，而其在x方向的单位伸长则可表以方程

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

弹性体在x方向的伸长还伴随有侧向收缩，即在y和z方向的单位缩短可表示为：

$$\varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$$

应力应变关系，物理方程

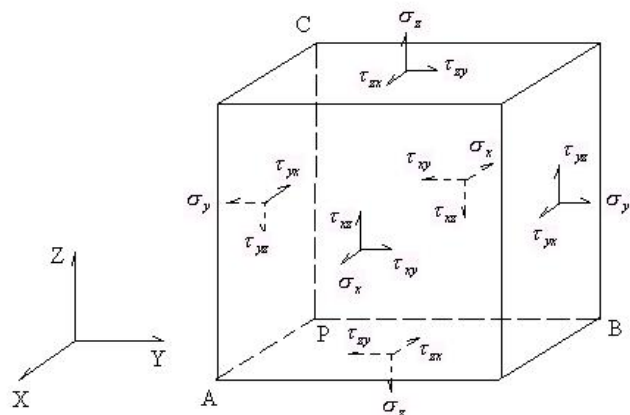


设图中的弹性体在各面上都受有均匀分布的正应力，则合成应变的分量可用叠加原理求得。实验证明，只须将三个应力中的每一应力所引起的应变分量叠加，就得到合成应变的分量。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \right\}$$

单位伸长与应力之间的关系完全由两个物理常数 E 及 μ 所确定。两个常数也可用来确定剪应力与剪应变之间的关系。

应力应变关系，物理方程



$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{aligned} \right\}$$

如果弹性体的各面有剪应力作用，如图所示，任何两坐标轴的夹角的改变仅与平行于这两轴的剪应力分量有关，即得到：

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$

式中G称为剪切模量，它与弹性模量E，泊松系数 μ 存在如下的关系：

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

前面方程中的正应变与方程中的剪应变是各自独立的。因此，由三个正应力分量与三个剪应力分量引起的一般情形的应变，可用叠加法求得；**即将上述六个关系式写在一起，称为本构方程或物理方程，这种空间状态的应力应变关系称为广义虎克定律。**

应力应变关系，物理方程

将应变分量表为应力分量的函数，可称为本构方程的第一种形式。若将上式改写成应力分量为应变分量的函数的形式，可得本构方程的第二种形式：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left(\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_y + \frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_z \right) \\ \sigma_y &= \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left(\frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_x + \varepsilon_y + \frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_z \right) \\ \sigma_z &= \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left(\frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_x + \frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_y + \varepsilon_z \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{zx} \end{aligned} \right\}$$



应力应变关系，物理方程

用矩阵的形式可将上式表示为：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

应力应变关系，物理方程

D称为**弹性矩阵**，它完全决定于弹性常数E和 μ

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \text{对} & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \text{称} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{array} \right\}$$

应力应变关系，物理方程

表征弹性体的弹性，也可以采用拉梅(Lam'e)常数 G ， λ

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

G 为弹性模量。

$$\lambda + 2G = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

本构方程中的弹性矩阵 $\mathbf{D}$ 亦可表示为

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \\ \text{对} & & & G & 0 & 0 \\ & \text{称} & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix}$$

本构方程的另一种形式是

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}$$

其中C是柔度矩阵：

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix}$$

显然， $\mathbf{C}=\mathbf{D}^{-1}$ ，它和弹性矩阵是互逆关系。

平面应力问题的物理方程

在平面应力问题中: $\sigma_z = 0, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{aligned} \right\}$$

由本构方程中后两式可知, 这时的剪应变:

$$\gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{zx} = 0$$

由本构方程中的第三式可得:

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

一般 $\sigma_z=0$, ε_z 并不一定等于零, 但可由 σ_x 及 σ_y 求得, 在分析问题时不必考虑。于是只需要考虑 ε_x , ε_y 和 γ_{xy} 三个应变分量即可, 于是应变矩阵可简化为:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

平面应力问题的物理方程

物理方程简化为:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu \sigma_y] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu \sigma_x] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \right\}$$

转化成应力分量用应变分量表示的形式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y] \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} [\mu \varepsilon_x + \varepsilon_y] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} = \frac{E}{1-\mu^2} \times \frac{1-\mu}{2} \gamma_{xy} \end{aligned} \right\}$$



平面应力问题的物理方程

将上式用矩阵方程表示：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

它仍然可以简写为：

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

弹性矩阵 $\mathbf{D}$ 则简化为：

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}$$



平面应变问题的物理方程

在平面应变问题中： $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left(\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_y + \frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_z \right) \\ \sigma_y &= \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left(\frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_x + \varepsilon_y + \frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_z \right) \\ \sigma_z &= \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left(\frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_x + \frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_y + \varepsilon_z \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{zx} \end{aligned} \right\}$$

因为 $\gamma_{yz}=0, \gamma_{zx}=0$

由本构方程中后两式可得

$$\tau_{yz}=0, \tau_{zx}=0$$

又由本构方程中的第三式可见：

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$$

在平面应变问题中，虽然 $\varepsilon_z=0$ 但 σ_z 一般并不等于零，不过它可以由 σ_x 及 σ_y 求得，在分析问题时无须考虑，于是也就只有三个应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 需要考虑。

平面应变问题的物理方程

本构方程简化为：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E(1+\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left(\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_y \right) \\ \sigma_y &= \frac{E(1+\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left(\frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_x + \varepsilon_y \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \times \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \right\}$$

平面应变问题的物理方程

将上式用矩阵方程表示：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

它仍然可以简写为：

弹性矩阵D则简化为： $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}$$



平面问题的物理方程

对于两种平面问题，物理方程都可以表示为：

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

对于平面应力

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}$$

对于平面应变

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}$$

平面应力物理方程→平面应变物理方程：

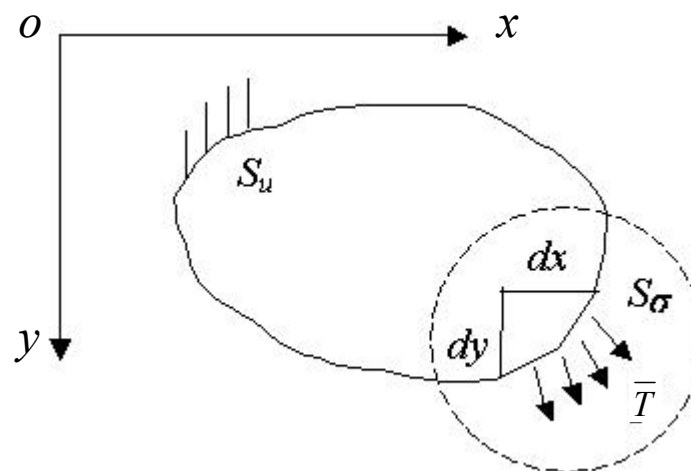
$$E \longrightarrow \frac{E}{1-\mu^2} \quad \mu \longrightarrow \frac{\mu}{1-\mu}$$

边界条件

通常把研究对象以外的其它物体称为**外界**；把属于研究对象本身并且与外界直接接触的那些接触面称为**边界**。**边界条件**是指边界的形状、边界所受的外力, 以及外界给予它的位移限制。

在弹性力学问题中, 弹性体 V 的全部边界为 S , 一部分边界上已知外力 $\bar{p}_x, \bar{p}$ 称为**力(自然)边界条件**, 这部分边界用 S_σ 表示; 另一部分边界上弹性体的位移 $\tilde{u}, \tilde{v}$ 已知, 称为**位移(本质)边界条件**, 这部分边界用 S_u 表示。这两部分边界构成弹性体的全部边界, 即:

$$S_\sigma + S_u = S$$



► 位移边界条件

在 S_u 上弹性体的位移已知为 $\tilde{u}, \tilde{v}$ 即有:

$$u = \tilde{u}, \quad v = \tilde{v} \quad (\text{在 } S_u \text{ 上})$$

位移边界条件的说明:

- (1) 它是函数方程, 要求在 S_u 上每一点, 位移与对应的约束位移相等。
- (2) 若为简单的固定边界, $\tilde{u} = \tilde{v} = 0$ 则有

$$(u)_s = 0, \quad (v)_s = 0, \quad (\text{在 } S_u \text{ 上})。$$

- (3) 它是在边界上物体保持连续性的条件, 或位移保持连续性的条件。

➤ 力边界条件

假设在 S_σ 上给定了面力分量 $\bar{p}_x, \bar{p}_y$ ，在考虑一点的应力状态时，若微分体是从边界上任一点 P 取出的，则斜面 AB 就是边界面，在此面上的应力分量 p_x, p_y 就是面力分量 $\bar{p}_x, \bar{p}_y$ ，而坐标面上的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 就是应力边界值，与面力的关系可表示为

$$\bar{p}_x(s) = (l\sigma_x + m\tau_{yx})_s$$

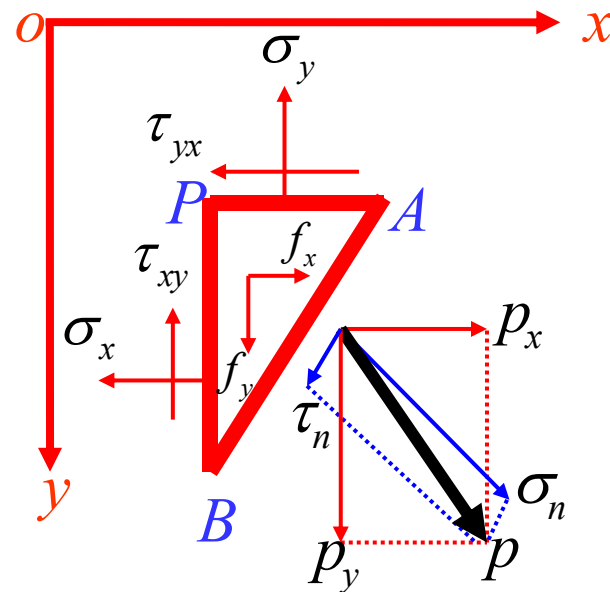
$$\bar{p}_y(s) = (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s$$

矩阵表达式



$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} \quad \text{在 } S_\sigma \text{ 上}$$

外法向矩阵





谢谢!



2023年7月