



智能可视建模与仿真实验室

Intelligent Visual Modeling & Simulation (iGame) Lab

IGA 第九讲

基于等几何分析的形状优化

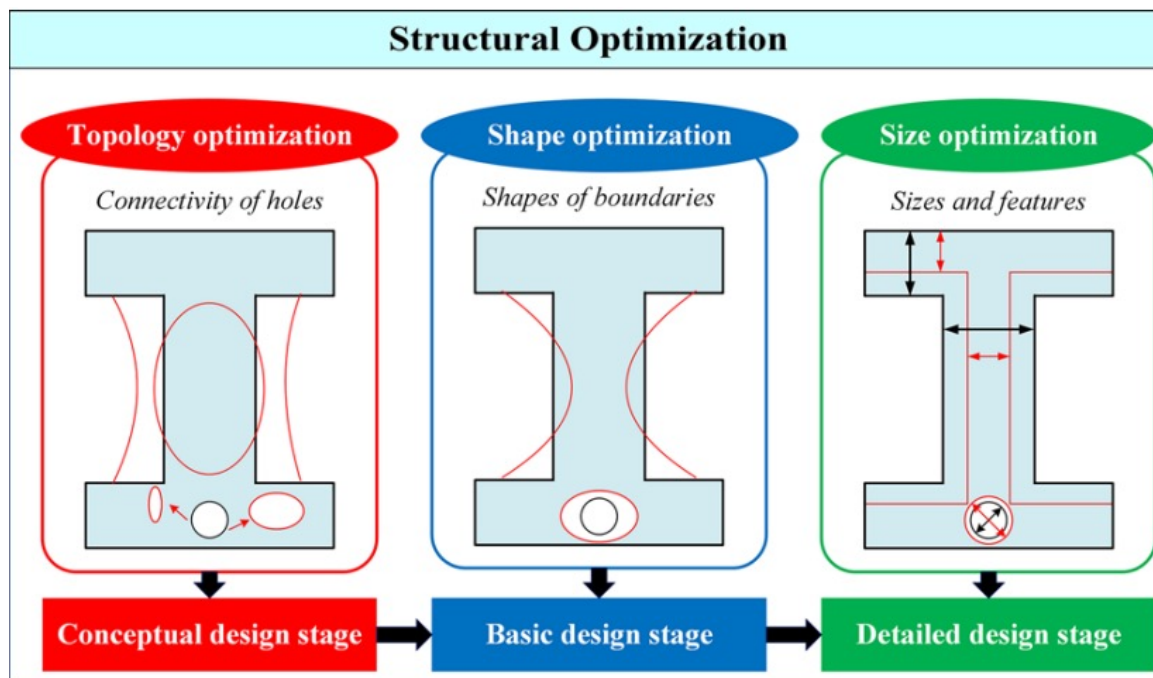
徐 岗

杭州电子科技大学计算机学院

目 录

1. 线弹性形状优化
2. 三维形状优化
3. 超弹性形状优化

- 结构优化设计以力学原理和数学规划算法为基础，通过最优化方法改变工程结构的尺寸、形状和拓扑构型，在给定的设计空间和约束条件下，实现结构的最优性能设计，进而提出创新设计方案。
- 通常，需对优化结果进行必要的后处理（如光滑和局部补强等），得到满足设计规范和工艺要求的结构优化设计。由于结构优化技术可以提供新的设计方案，已广泛应用于航空航天、汽车、机械、土木及船舶工程等领域。



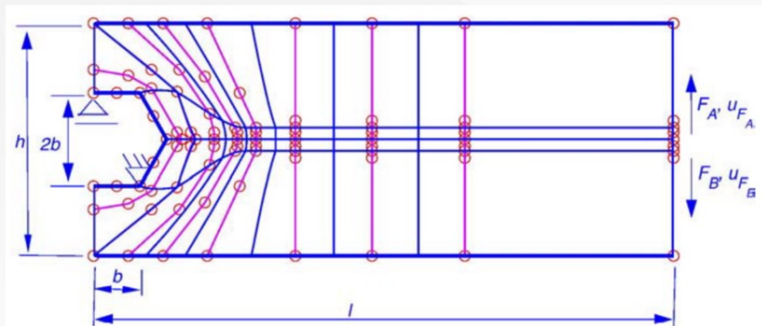
6

数值例子——开口扳手

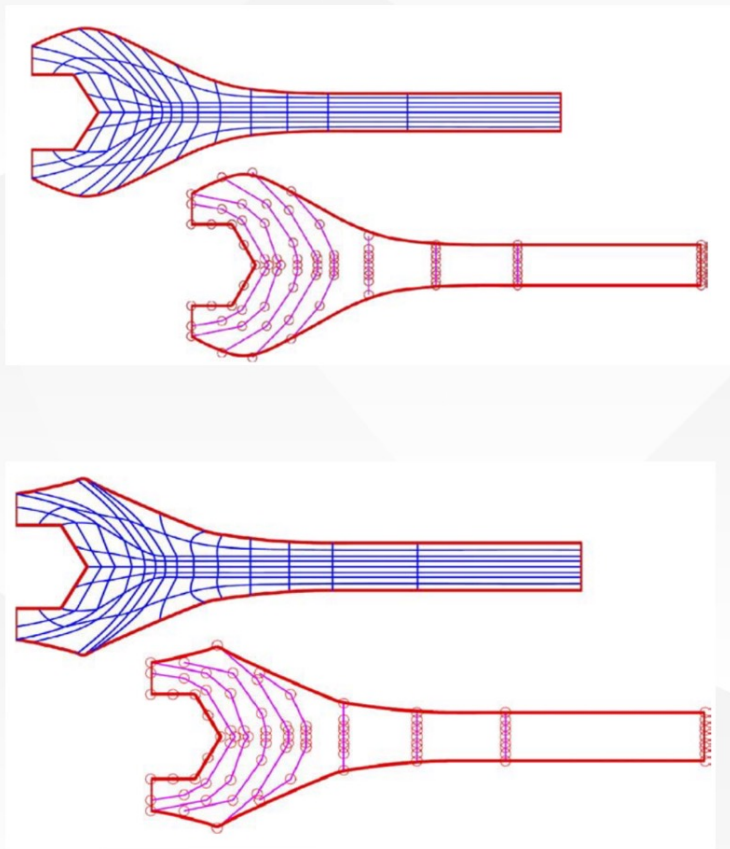


杭州电子科技大学
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

设计目标是在给定的材料体积下，使 u_{FA} 和 u_{FB} 在两种加载情况下的位移最小化， u_{FA} 和 u_{FB} 分别为 F_A 和 F_B 加载点的垂直位移。



初始模型：长度 $l=25$ ，最大高度 $h=10$ 和最小手柄厚度为2。螺栓的形状和尺寸($b=2$)是固定的。使用双二次控制网络来表示结构。总共有 10×9 个控制点。初始权值都设置为1。优化设计的体积限制为初始体积的35%。杨氏模量为 210×10^3 ，泊松比为0.3。收敛性判别准则是 $\epsilon = 1.0e-6$ 。



- 形状优化是一种通过调整物体几何外形来提高产品结构性能的方法。在等几何分析框架中，它通常以控制点坐标为设计变量，以物理性能指标（如柔度，最大位移，最大应力 等）为目标函数或约束函数，构建数学优化模型，寻找最佳几何结构。
- 形状优化可以高效地生成合理的工程设计方案，其发展至今已经成为工业设计和制造领域的重要部分。通常，形状优化过程分为三个部分：参数化几何描述和更新（设计模型）、结构响应分析（分析模型）和优化算法。其中，设计模型使用控制几何外形的样条或网格来描述；分析模型使用等几何分析/有限元法等数值方法计算结构响应；最后由优化算法控制优化方向，不断迭代收敛到极值。

形状优化问题的数学模型如下：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & h_i(x) = 0, i = 1, \dots, n_h \\ & g_i(x) \leq 0, j = 1, \dots, n_q \\ & x_{\min} \leq x_k \leq x_{\max}, k = 1, \dots, n_{eq} \end{aligned}$$

针对不同的优化问题，优化模型有多种不同的表达形式。通常有柔度、节点位移、最大应力、体积四种目标函数，其中体积和最大应力通常也作为不等式约束使用。

(1) 柔度:

柔度又称为结构应变能，指物体在受力平衡下存储的应变能大小，柔度值越大物体的稳定性越差，所以一般目标函数设定为柔度最小。柔度优化问题通常使用体积或面积作为不等式约束，问题可简述为：

$$\begin{aligned} \min \quad & f = F^T u \\ \text{s.t.} \quad & Ku = F \\ & V \leq V^* \end{aligned}$$

其中 V^* 是约束的体积或面积上限

(2) 节点位移:

节点位移作为目标函数时，优化目的是使模型在受力平衡时，某一物理点的位移量最小化。通常情况下，约束是模型的体积或面积，问题形式如下：

$$\begin{aligned} \min \quad & f = I^T u^h \\ \text{s.t.} \quad & Ku = F \\ & V \leq V^* \end{aligned}$$

其中 I 是一个只有 0 和 1 的向量，向量长度等于控制点的数量。 u^h 则根据具体问题进行调整：如果位移节点是某个控制点，则 u^h 是各控制点上的位移值， I 在该控制点索引处值为 1，其它位置均为 0；如果位移节点是某个已知参数坐标的物理点（非控制点），则 u^h 是各位移点在该参数坐标下的位移值， I 在所有与该参数点关联的索引处取 1，其它位置处取 0。

(3) 最大应力:

为防止结构断裂，设计者需要设法减小断裂处承受的应力值。虽然柔度的减小也能降低整体的平均应力值大小，但柔度往往关注整体区域内能大小，而忽略某些局部区域的应力可能会超出材料承受的范围，因此优化中常常使用最大应力最小化作为目标函数。最大值最小化的直接数学形式是不可导函数，通常会选用 **p-norm** 方法间接实现，优化问题表述如下：

$$\begin{aligned} \min \quad & f = \left(\sum_{k=1}^{npts} |\sigma_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ \text{s.t.} \quad & Ku = F \\ & V \leq V^* \end{aligned}$$

其中 **npts** 为采样点个数， σ 为应力值。 p 是一个正整数，当 p 足够大时，所有应力值中最大值的 p 次方结果远远大于其它数值，因此开 p 次方根后目标函数值约等于最大应力数值。经实验测试， p 取值在 40 以上能基本满足需要。

(4) 体积或面积:

模型体积或面积是模型成本的一个重要指标，一般以约束形式将目标体积限制在某个范围内来控制产品成本，然后优化模型其它性能。有时也会以体积为目标函数，最大应力为约束条件优化形状，问题简述为：

$$\begin{aligned} \min \quad & f = V_{\hat{\Omega}} \sum_{k=1}^{n_e} |J_k| \\ \text{s.t.} \quad & Ku = F \\ & \left(\sum_{k=1}^{npts} |\sigma_k|^p \right)^p \leq \sigma^* \end{aligned}$$

其中 $V_{\hat{\Omega}}$ 是参数单元的体积， $|J|$ 是单元的雅可比行列式。对于三维模型，如果参数单元是形如 $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ 标准的参数域，则模型的体积等于各单元雅可比矩阵的行列式之和。同理在二维模型标准参数域下，模型的面积等于各单元雅可比行列式之和。

移动渐近线法 (Moving Asymptotes Method , MMA) 是一种常用的非线性优化算法 , 可用于解决各种工程问题和科学问题。它是一种通过不断移动约束的渐近线来求解非线性优化问题的方法。该方法最早由 Svanberg 在 20 世纪 80 年代提出 , 在它出现之前 , 求解复杂的非线性优化问题是非常困难的。

MMA 算法的基本思想是在每次迭代中调整伸缩参数 , 以使目标函数随着迭代步骤的增加而逐渐优化。该算法将约束条件表示为渐进线的形式 , 利用不断移动这些渐进线的方法来求解问题。在 MMA 算法中 , 约束条件被看作是一组渐进线 , 这些线以递减的方式彼此靠近 , 接近到一定程度时问题解决了。

优点:

1. 可以处理复杂的非线性问题
2. 随着迭代次数的增加, 求解的精度逐渐提高
3. 求解效率高, 可适用于大规模问题

缺点:

1. 对于某些类型的问题, 该算法可能会陷入局部极小;
2. 目标函数变化过于剧烈或约束条件变化过于剧烈时, 可能会失效

形状优化问题具有可求导的性质，因此可以采用基于梯度的移动渐近线（MMA）求解问题，其思想是将问题分解成多个近似凸子问题，通过迭代每个子问题得到原问题的解。其求解形式如下：

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(s) + a_0 z \sum_{i=1}^m (c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i) \\ \text{s. t.} \quad & f_i(s) - a_i z - y_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \alpha_j \leq s_j \leq \beta_j, \quad j = 1, \dots, n \\ & y_i \leq 0, z \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

其中 s_j 是原问题的设计变量， α_j 和 β_j 是子问题的下界和上界。 a_0, a_i, c_i 和 d_i 是常系数，其值决定求解问题的类型， y_i 和 z 是引入的新变量，通过求解方程获得。 α_j, β_j 控制着问题的求解方向，其值直接影响问题的收敛性，所以该项又称为移动渐进线的边界，表示形式如下：

$$\begin{aligned} \alpha_j^{(k)} &= \max \left[s_j^{\min}, k l_j^{(k)} + \lambda s_j^{(k)} \right] \\ \beta_j^{(k)} &= \min \left[s_j^{\max}, k u_j^{(k)} + \lambda s_j^{(k)} \right] \end{aligned}$$

其中 k, λ 用于控制渐进线的移动。为了使得渐进线的移动足够灵活，设计了如下的规则确定每次迭代的 $l_j^{(k)}$ 和 $u_j^{(k)}$ 数值大小：

如果 $k = 0$ 或 $k = 1$ 时，上下渐进线需满足：

$$\begin{aligned} l_i^{(k)} &= s_j^k - (s_j^{\max} - s_j^{\min}) \\ u_j^k &= s_j^k + (s_j^{\max} - s_j^{\min}) \end{aligned}$$

如果 $k \geq 2$ 且 $s_j^{(k)} - s_j^{(k-1)}$ 和 $s_j^{(k-1)} - s_j^{(k-2)}$ 符号相反时, 满足:

$$l_i^{(k)} = s_j^k - 0.7(s_j^{k-1} - s_j^{k-1})$$

$$u_j^k = s_j^k + 0.7(s_j^{k-1} - s_j^{k-1})$$

否则, 需满足:

$$l_i^{(k)} = s_j^k - (s_j^{k-1} - s_j^{k-1})/0.7$$

$$u_j^k = s_j^k + (s_j^{k-1} - s_j^{k-1})/0.7$$

根据上述公式, 在每个迭代步骤中根据梯度信息移动渐近线范围, 将设计变量收敛到最优值。

- 结构灵敏度所求的就是目标函数对设计变量的导数。结构灵敏度在结构优化、可靠性评估和参数识别时都起到先决条件的作用。
- 结构的优化设计，其求解的效率在很大程度上依赖于设计灵敏度分析的效率 and 精度。
- 目前结合有限元求解结构灵敏度的主要方法有解析法、有限差分法、半解析法、复变函数法、伴随变量法等方法。
- 解析法发展最早，它的优点是可以得到准确的结果。但是对于不同的单元，不同的设计参数都必须进行不同的理论推导，且推导过程都较为复杂。

灵敏度分析是用于评估目标函数对设计变量扰动的敏感性指标，灵敏度数值代表模型目标受到该设计变量的影响程度，在评估模型的鲁棒性和确定优化问题搜索方向上极为有效。等几何形状优化过程中，几何域 Ω 会因设计变量的变化而变化，但相应的参数域 $\hat{\Omega}$ 不会受到影响，从而使单元保持良好的质量。假设目标函数为 f ，其对设计变量 x_i 的一阶导数为：

$$\frac{df}{dx_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} \quad (1)$$

其中 f 对 x_i 微分的值通常为 0， f 对 $\mathbf{u}$ 的微分可根据目标函数或其展开形式直接计算，因此仅有 $d\mathbf{u}/dx_i$ 是未知项。通过求解离散系统平衡方程 $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}$ 的导数获得位移导数的具体形式，如下：

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx_i} = \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \quad (2)$$

联立式(1)(2)可得最终的导数求解形式：

$$\frac{df}{dx_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \quad (3)$$

联立(1)(2)等式可得最终的导数求解形式：

$$\frac{df}{dx_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \quad (3)$$

上式中涉及矩阵的逆求解，然而直接求逆的成本很大，一般会使用伴随方法将逆的求解转为方程组的求解，如下：

$$\mathbf{K} \mathbf{u}^* = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \quad (4)$$

再将结果代入导数最终的求解形式中，执行一系列矩阵运算求得导数值：

$$\frac{df}{dx_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mathbf{u}^* \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \quad (5)$$

其中式(4)的函数与具体的设计变量无关，其值可重复用于式(5)中计算目标函数或约束对不同设计变量导数值。由于线弹性和超弹性材料特性不同，因此载荷向量和刚度矩阵对设计变量的导数表示形式也不同，需要分别求解。

由上述的单元离散平衡方程式可知，具体的单元刚度矩阵和单元载荷向量的形式表示为：

$$\mathbf{K}_e = \int_{\hat{\Omega}_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |J| d\hat{\Omega}_e$$

$$\mathbf{F}_e = \int_{\hat{\Omega}_e} \mathbf{N}^T \mathbf{p} |J| d\hat{\Omega}_e + \int_{\hat{\Gamma}_N^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} |J| d\hat{\Gamma}_N^e$$

根据导数的链式法则，线弹性下的刚度矩阵和载荷向量对设计变量的导数形式表示如下：

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial x_i} = \int_{\hat{\Omega}_e} \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial x_i} \mathbf{D} \mathbf{B} |J| + \mathbf{B}^T \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i} |J| + \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \frac{\partial |J|}{\partial x_i} d\hat{\Omega}_e$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_e}{\partial x_i} = \int_{\hat{\Omega}_e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \mathbf{p} |J| + \mathbf{N}^T \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_i} \right) |J| + \mathbf{N}^T \mathbf{p} \frac{\partial |J|}{\partial x_i} d\hat{\Omega}_e$$

$$+ \int_{\hat{\Gamma}_N^e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \mathbf{t} |J| + \mathbf{N}^T \left(\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_i} \right) |J| + \mathbf{N}^T \mathbf{t} \frac{\partial |J|}{\partial x_i} d\hat{\Gamma}_N^e$$

其中 $\mathbf{x}$ 是样条物理点坐标矩阵， $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{t}$ 通常是 $\mathbf{x}$ 的函数或常量，因此其导数形式可以直接给出，所以问题灵敏度计算最终转化为求 $\mathbf{B}'$ ， $|J|'$ ， $\mathbf{N}'$ ， $\mathbf{x}'$ 的值， $()'$ 表示 $\partial()/\partial x_i$ 。

矩阵 $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}$ 由基函数对物理坐标的导数线性组合组成，定义矩阵 $\mathbf{G}$ 存储所有基函数对物理坐标的导数，定义矩阵 $\hat{\mathbf{G}}$ 存储所有基函数对参数坐标的导数，形式如下：

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

显然，上述两矩阵可通过积分的链式法则连接，即 $\mathbf{G} = \mathbf{J}^{-1}\hat{\mathbf{G}}$ 。矩阵 $\mathbf{B}'$ 的值可以通过矩阵 $\mathbf{G}'$ 线性组合得到，组合方式和原 $\mathbf{G}$ 的方式一致，而矩阵 $\hat{\mathbf{G}}$ 与物理坐标无关，且雅可比矩阵由矩阵 $\hat{\mathbf{G}}$ 和 $\mathbf{x}$ 组合，形式为 $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{G}}\mathbf{x}$ ，所以 $\mathbf{G}'$ 矩阵最终的表示形式为：

$$\mathbf{G}' = -\mathbf{G}\mathbf{x}'\mathbf{G}$$

同理雅可比矩阵行列式的导数 $|\mathbf{J}|'$ 也可以转换为和 $\mathbf{x}'$ 相关的形式，如下：

$$|\mathbf{J}|' = |\mathbf{J}| \operatorname{tr}(\mathbf{J}^{-1}\mathbf{J}') = |\mathbf{J}| \operatorname{tr}(\mathbf{J}^{-1}\hat{\mathbf{G}}\mathbf{x}') = |\mathbf{J}| \operatorname{tr}(\mathbf{G}\mathbf{x}')$$

其中基函数 $\mathbf{N}'$ 与物理坐标无关，最终各灵敏度的计算结果由物理坐标对设计变量的导数决定。根据样条坐标映射关系，物理坐标由物理控制点坐标和基函数组合，形式表示如下：

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_A \mathbf{N}_A(\xi) \mathbf{P}_A = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & N_2(\xi) & \dots & N_A(\xi) \\ N_1(\xi) & N_2(\xi) & \dots & N_A(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_A \\ y_1 & y_2 & \dots & y_A \end{bmatrix}^T$$

其中 $\mathbf{A}$ 是控制点序号。由于设计变量是控制模型外部几何形状的控制点，其值与矩阵 $\mathbf{P}$ 中某一元素相对应，所以上式中仅有矩阵 $\mathbf{P}$ 与设计变量相关，其导数的最终形式为：

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

式中值为 1 的元素序号为选择的设计变量在控制网格中的序号，由于控制点具有多个维度，因此设计变量的选择需要具体到某一控制点的某个维度上。

6

数值例子——1/4带孔平板

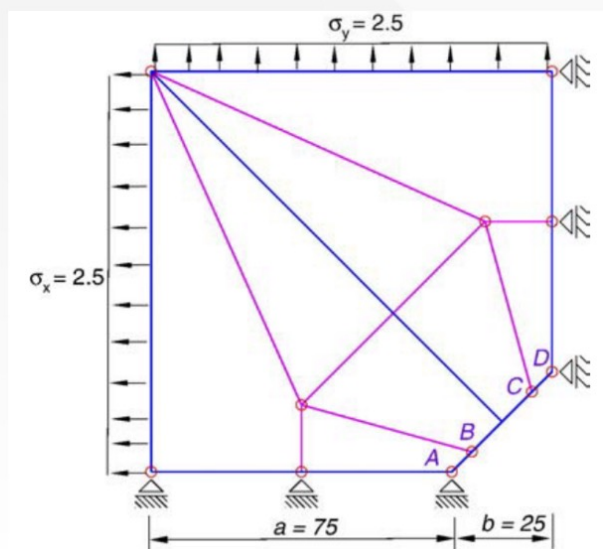


杭州电子科技大学
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

板厚 $t_e=1.0$,优化的目标函数的收敛条件为：

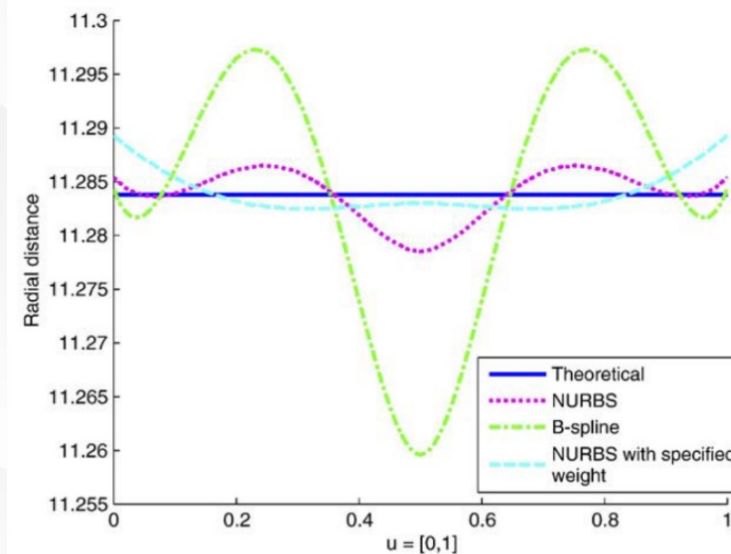
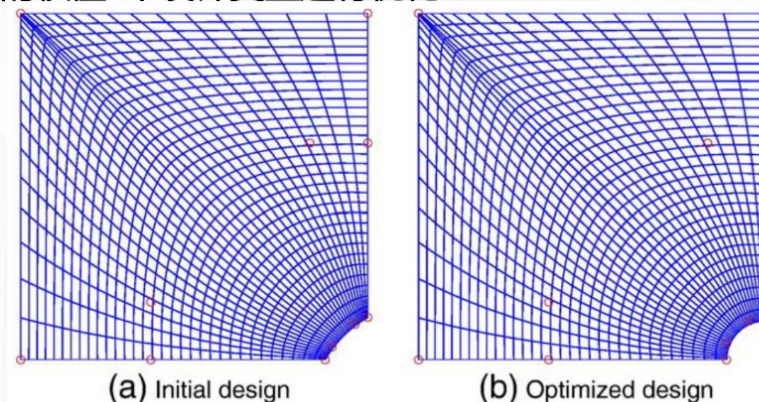
$$\varepsilon = \left| \frac{f^{(k)} - f^{(k-1)}}{f^{(0)}} \right|$$

优化目标：在材料体积约束($V \leq 96\%$)下使板的柔度最小。

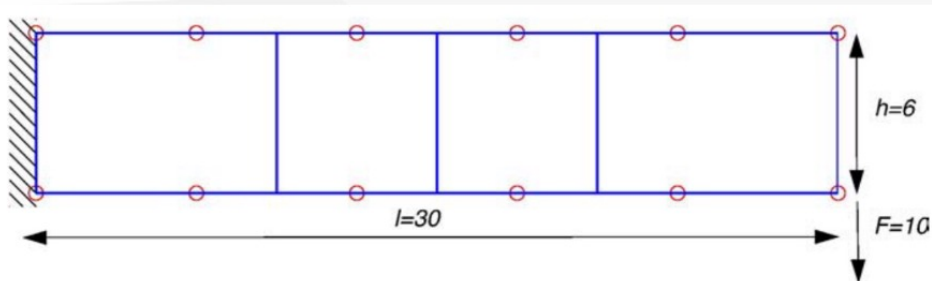


初始模型：具有4个控制点的双二次NURBS曲面。节点向量是 $\{0,0,0,0.5,1,1,1\}$ 和 $\{0,0,0,1,1,1\}$ 。杨氏模量为210，泊松比为0.3。

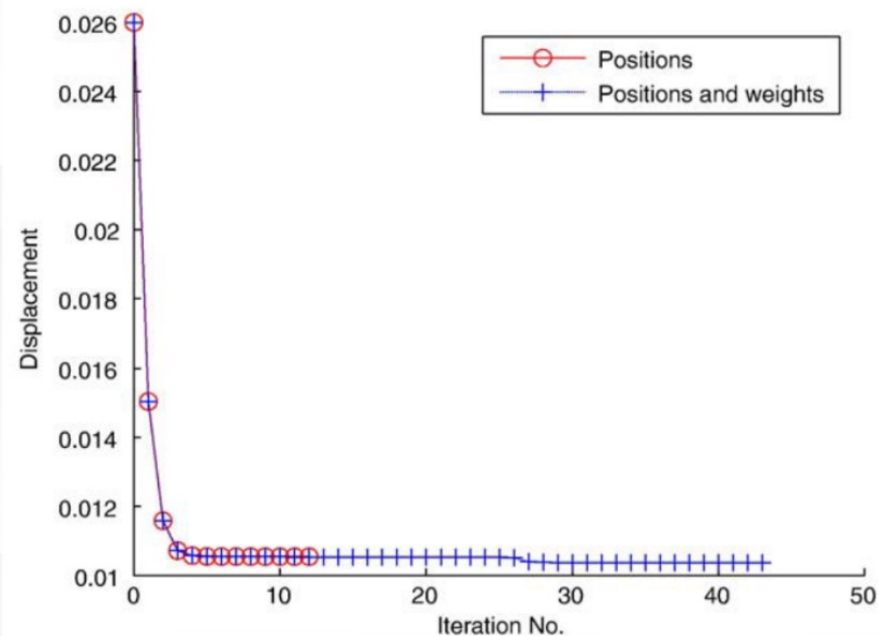
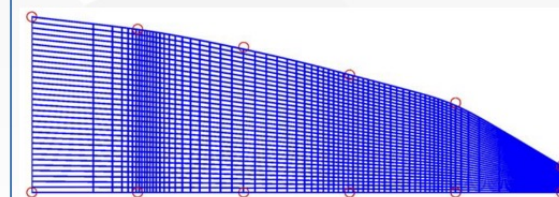
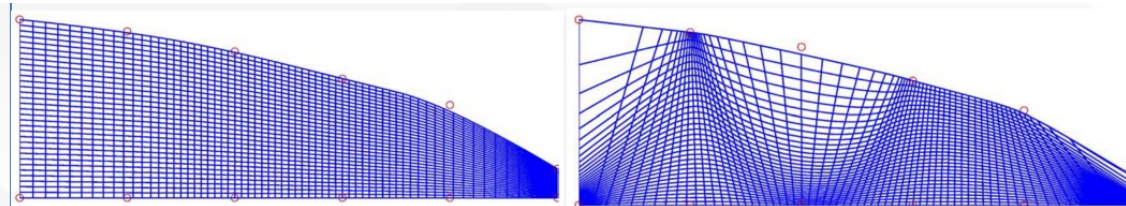
对A、B、C控制点的x坐标；B、C、D控制点的y坐标；B、C控制点的权值8个设计变量进行优化：



悬臂梁的设计目标是在体积约束下使荷载点处的竖向位移最小。



初始模型：允许高度 $1.5 \leq h \leq 10$. 控制网格为 6×2 ，节点向量分别为： $\{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\}$ 和 $\{0, 0, 1, 1\}$ 。杨氏模量为 200×10^3 ，泊松比为0.3。收敛性判别准则是 $\varepsilon = 1.0e-7$ 。



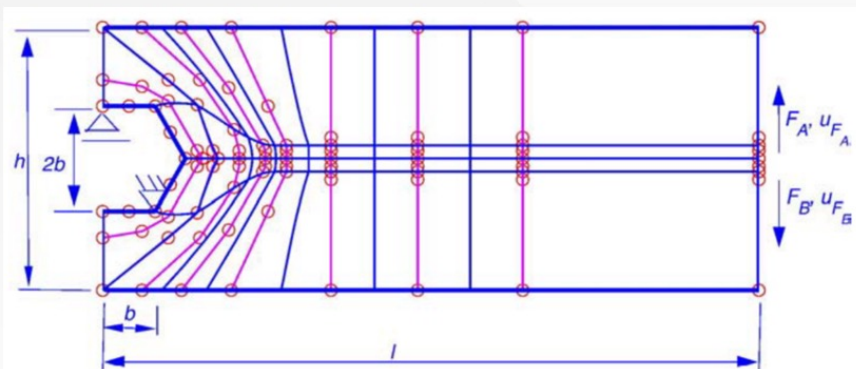
6

数值例子——开口扳手

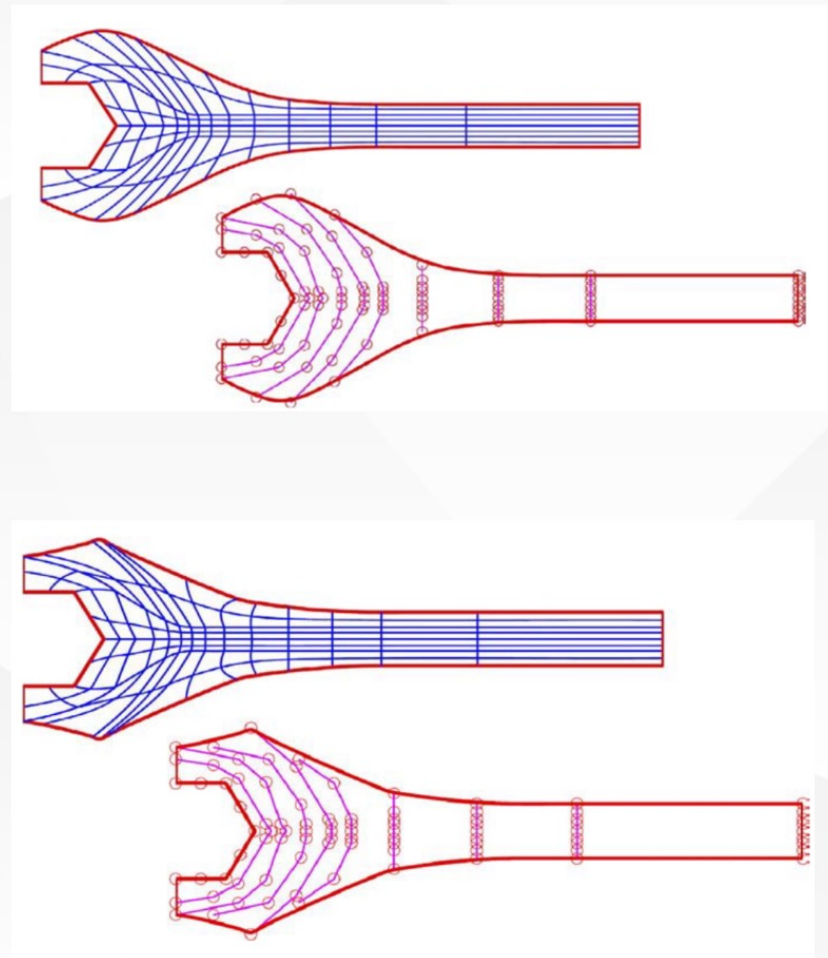


杭州电子科技大学
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

设计目标是在给定的材料体积下，使 u_{FA} 和 u_{FB} 在两种加载情况下的位移最小化， u_{FA} 和 u_{FB} 分别为 F_A 和 F_B 加载点的垂直位移。



初始模型：长度 $l=25$ ，最大高度 $h=10$ 和最小手柄厚度为2。螺栓的形状和尺寸($b=2$)是固定的。使用双二次控制网络来表示结构。总共有 10×9 个控制点。初始权值都设置为1。优化设计的体积限制为初始体积的35%。杨氏模量为 210×10^3 ，泊松比为0.3。收敛性判别准则是 $\epsilon = 1.0e-6$ 。



目 录

1. 线弹性形状优化
2. 三维形状优化
3. 超弹性形状优化

4.1

三维线弹性问题的表达式

杭州电子科技大学
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

弹性力学的理论是建立在几何方程、平衡方程和本构方程三组方程的基础上的。其中线弹性问题的表达式为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) &= \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u}) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{f} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u})\end{aligned}$$

狄利克雷约束和诺依曼约束为：（ $\boldsymbol{n}$ 为单位外法向， $\boldsymbol{t}$ 为外力矢量）

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} &= \bar{\boldsymbol{t}} \quad \text{on } \Gamma_N\end{aligned}$$

4.2

三维线弹性问题的离散化

杭州电子科技大学
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

根据最小势能原理，线弹性问题的离散表达形式为：

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{f}.$$

单元刚度矩阵为：

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$$

式中 $\mathbf{B}$ 为应变矩阵， $\mathbf{D}$ 为6阶本构方阵

另外，根据IGA等参单元思想，其中涉及到物理空间、参数空间、基准空间的雅可比变换，对于积分式采用高斯积分法进行求解刚度矩阵，这里不再赘述。

4.3

形状优化的目标函数



杭州电子科技大学
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

结构优化问题的一般数学公式可以表述为：

$$\begin{cases} \min_{\alpha_s} & f(\mathbf{u}(\alpha), \alpha) \\ \text{s.t.} & h_i(\mathbf{u}(\alpha), \alpha) = 0, & i = 1 \text{ to } n_h, \\ & g_j(\mathbf{u}(\alpha), \alpha) \leq 0, & j = 1 \text{ to } n_g, \\ & \alpha_{\min_s} \leq \alpha_s \leq \alpha_{\max_s}, & s = 1 \text{ to } n_{eq} \end{cases}$$

设置优化目标为达到结构最小柔度时的表达形式为：

$$J(\Omega) = \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} d\Gamma$$

式中 $\mathbf{g}$ 为外力矢量， $\mathbf{u}$ 为线弹性问题的位移解

采用拉格朗日表达引入体积约束的目标函数表达式即为：

$$\min_{\Omega \in \mathbb{R}^n} L(\Omega, \beta), \quad L(\Omega, \beta) = J(\Omega) + \beta \left(\int_{\Omega} d\Omega - V_0 \right)$$

4.4

形状灵敏度的计算



杭州电子科技大学
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

目标函数的拉格朗日表达式的形状导数表示为：

$$dL(\Omega, \beta; V) = \int_{\Gamma} \left(\beta - (2\mu |\epsilon(\mathbf{u})|^2 + \lambda |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2) \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

式中 μ 、 λ 为材料拉梅常数， $\mathbf{v}$ 为形状位移

为了达到结构柔度下降的目标方向，形状位移 $\mathbf{v}$ 表示为：

$$\mathbf{v} = \begin{cases} (2\mu |\epsilon(\mathbf{u})|^2 + \lambda |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 - \beta) \mathbf{n} & \text{on } \Gamma \\ 0 & \text{on } \Gamma_D \cup \Gamma_N \end{cases}$$

4.5

设计变量的更新

杭州电子科技大学
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

计算出形状导数后，通过求解下面类似线弹性离散平衡方程的问题，得到控制变量对应的变形位移解V

$$\mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{C}^1 - \beta \mathbf{C}^2$$

式中

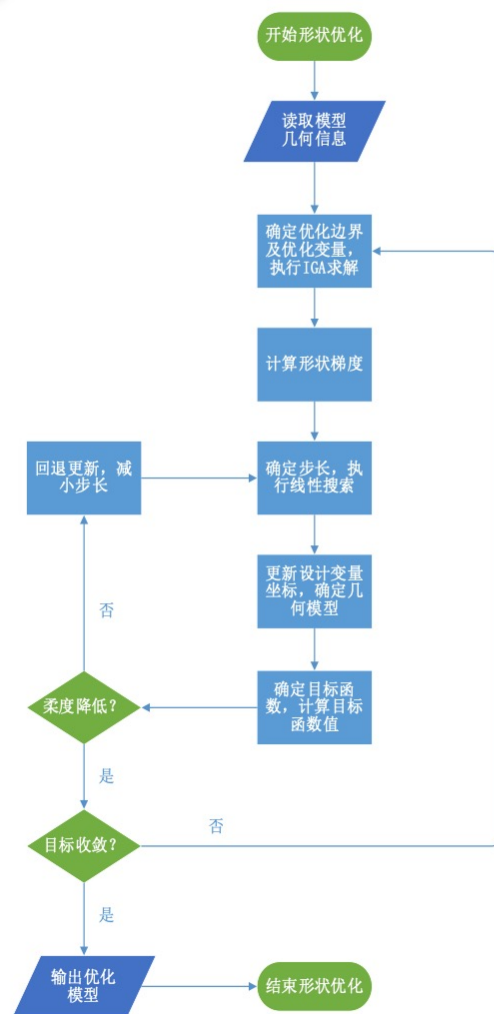
$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i^1 &= \int_{\Gamma} (2\mu |\epsilon(\mathbf{u})|^2 + \lambda |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2) \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \\ \mathbf{C}_i^2 &= \int_{\Gamma} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \end{aligned}$$

4.6

等几何形状优化算法框架



杭州电子科技大学
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY



1. 读入样条几何模型: 基函数信息与控制点信息

2. 确定初始模型 (几何信息与拓扑信息)

3. 进行IGA求解, 计算结构位移解 $U^{(k)}$

4. 计算形状梯度, 进行IGA求解, 计算形状位移解 $V^{(k)}$

5. 设置初始下降步长 $t^{(k)}$

6. 迭代进行线性搜索

7. 计算更新的控制点坐标: $X^{(k+1)} = X^{(k)} + t^{(k)}V^{(k)}$

8. 进行IGA求解: 计算结构位移解 $U^{(k+1)}$

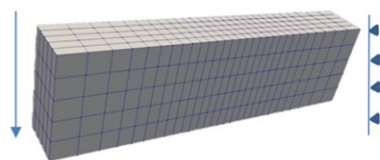
9. 计算当前目标函数值 (刚度信息值)

10. 如果刚度值降低, 步长 $t^{(k)}$ 不变; 否则步长减小回到步骤7

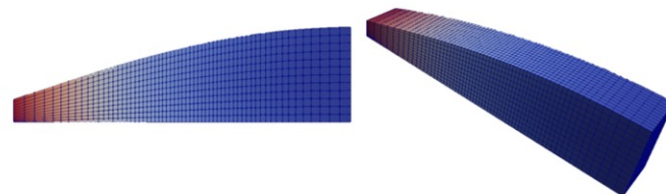
11. 如果收敛算法结束, 否则开始执行步骤3进行下一次迭代

4.8

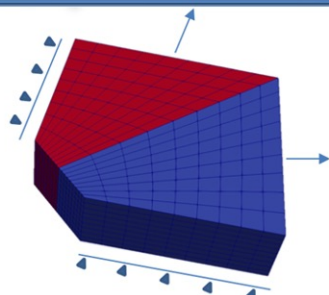
三维单片、多片模型形状优化结果

杭州电子科技大学
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

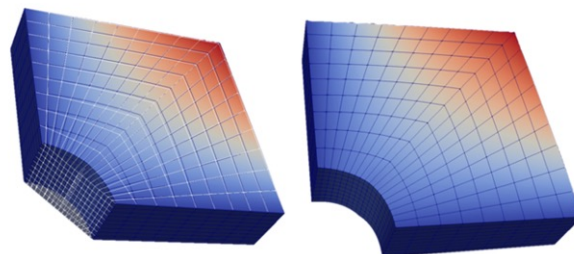
(a) 单片悬臂梁初始模型



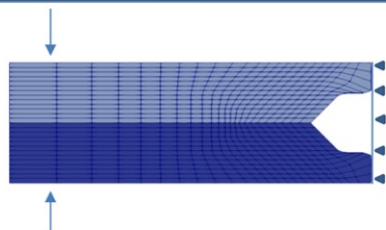
(b) 单片悬臂梁形状优化结果



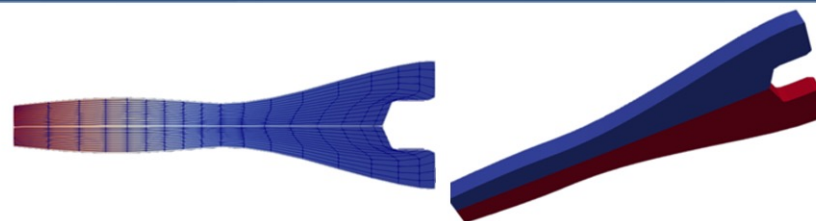
(c) 多片1/4带孔板初始模型



(d) 多片1/4带孔板形状优化结果



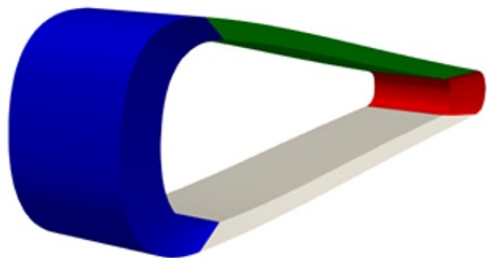
(e) 多片开口扳手初始模型



(f) 多片开口扳手形状优化结果

4.9

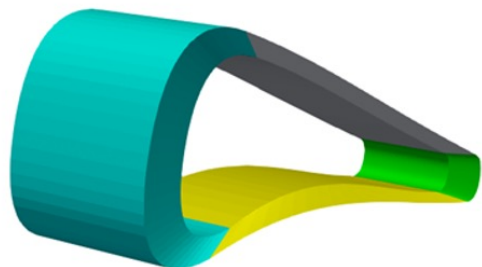
多片涡轮叶身结构形状优化结果

杭州电子科技大学
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

(a) 涡轮叶身非形变初始模型



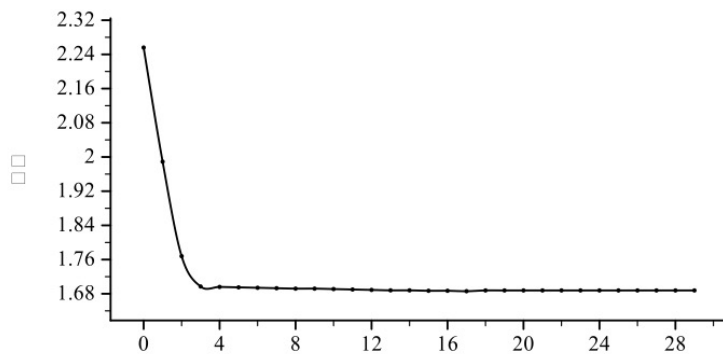
(b) 边界条件施加情况



(c) 涡轮叶身形状优化结果



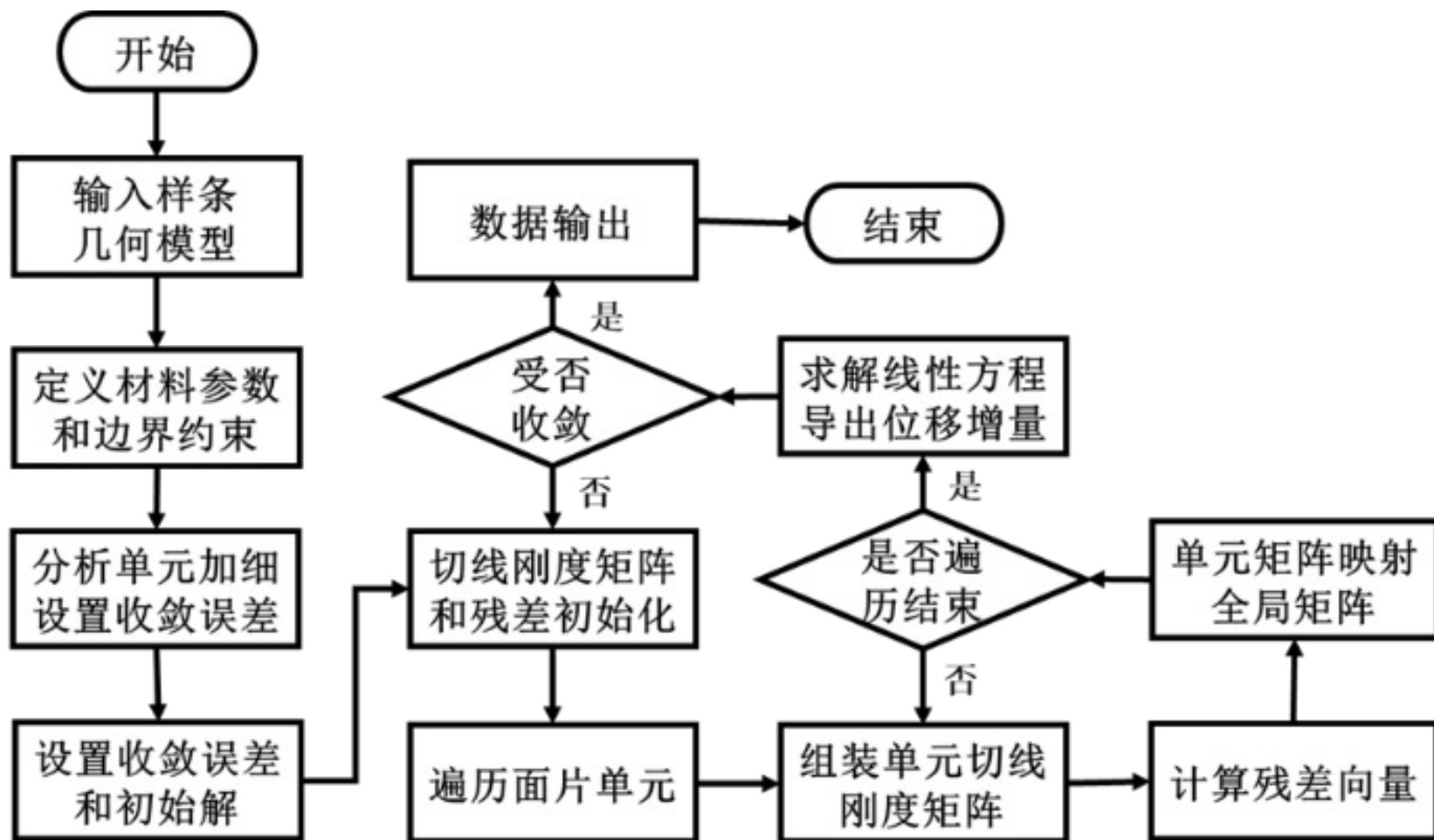
(d) 等几何求解结果

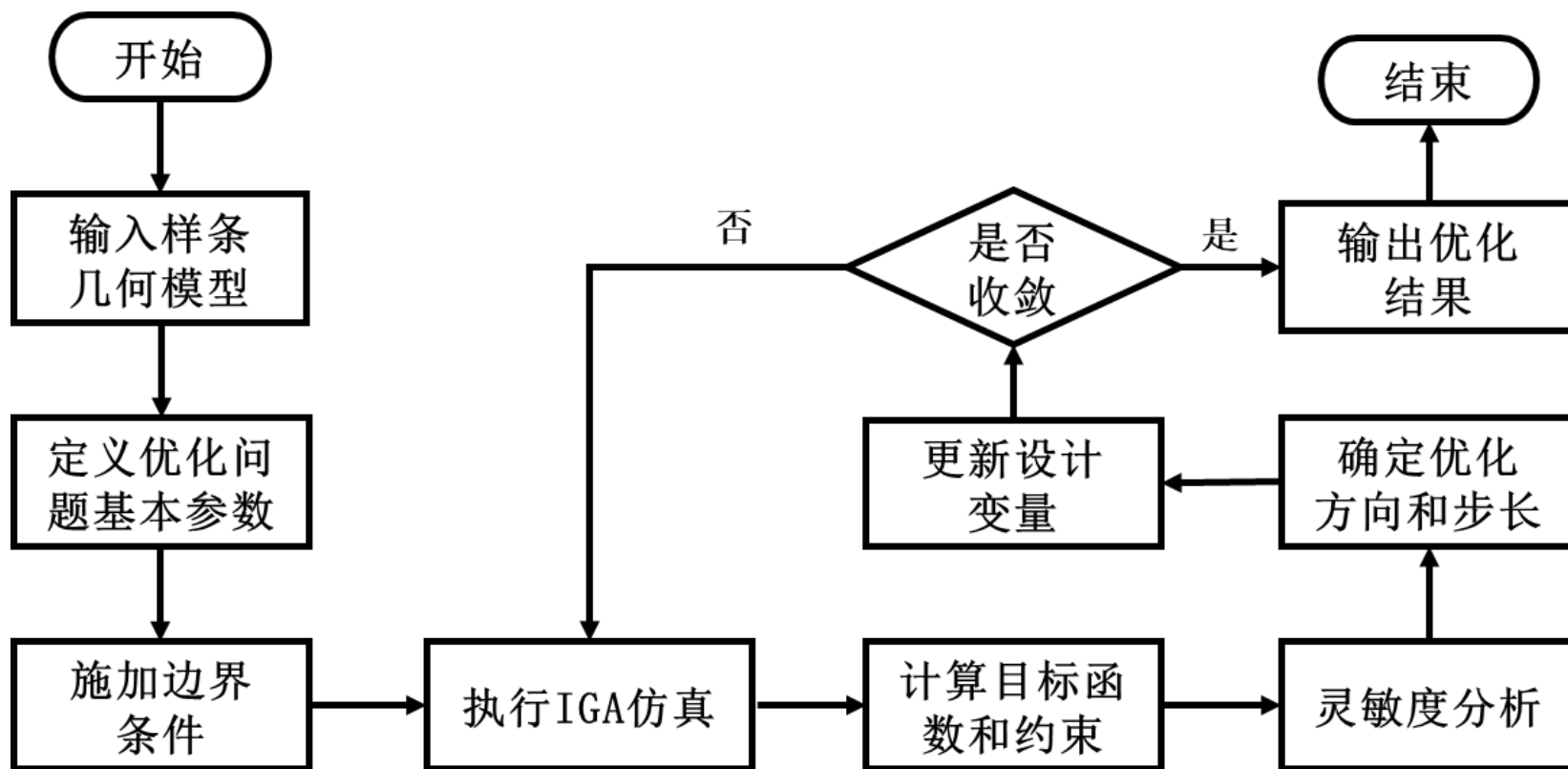


(e) 以柔度最小化为优化目标的迭代过程

目 录

1. 线弹性形状优化
2. 三维形状优化
3. 超弹性形状优化





优化问题的一般数学公式可以表述为：

$$\begin{cases} \min_{\alpha_s} & f(\mathbf{u}(\alpha), \alpha) \\ s.t & h_i(\mathbf{u}(\alpha), \alpha) = 0, \quad i = 1 \dots n_h \\ & g_i(\mathbf{u}(\alpha), \alpha) \leq 0, \quad i = 1 \dots n_g \\ & \alpha_{\min} \leq \alpha_s \leq \alpha_{\max}, \quad i = 1 \dots n_{eq} \end{cases}$$

优化算法：

非启发式：**MMA**、内点法.....

启发式：粒子群算法、模拟退火算法.....

终止条件：

$$\varepsilon = \left| \frac{f^k - f^{k-1}}{f^0} \right| < tol$$

设置优化目标为达到**最小柔度**时的优化模型为：

$$\begin{aligned} \min_{\alpha_s} \quad & f_c = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \\ & V \leq V^* \end{aligned}$$

设置优化目标为达到**最小应力**时的表达形式为：

$$\min_{\alpha_s} f_\sigma = \left(\sum_{k=1}^{n_{pts}} \sigma_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \leftarrow \quad \sigma_{von} = \left[\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_{12}^2}{2} \right]^{1/2}$$
$$= \left(\boldsymbol{\sigma}^T \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \right)^{1/2} = (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{V} \boldsymbol{\sigma})^{1/2}$$

设置优化目标为达到**最小位移**时的优化模型为：

$$\min_{\alpha_s} f_u = \sqrt{u^h \cdot u^h} \quad \min_{\alpha_s} f_u = \left(\sum_{k=1}^{n_{pts}} u_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$u^h(M) = \sum R(M)u$$

设置优化目标为达到**最小面积（体积）**时的表达形式为：

$$\min_{\alpha_s} f_v = \sum_{k=1}^{n_{pts}} |J_k| \quad \leftarrow \quad dxdy = |J| d\xi d\eta$$

4

单元刚度矩阵及力向量对设计变量的灵敏度

单元刚度矩阵对设计变量的偏导公式：

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \alpha_s} = \int_{\hat{\Omega}_e} \left(\frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \alpha_s} \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}| + \mathbf{B}^T \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \alpha_s} |\mathbf{J}| + \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial \alpha_s} \right) t_e d\hat{\Omega}.$$

单元力向量对设计变量的偏导公式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_e}{\partial \alpha_s} = & \int_{\hat{\Omega}_e} \left(\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \alpha_s} \mathbf{b} |\mathbf{J}| + \mathbf{N}^T \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial x_s} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_s} \right) |\mathbf{J}| + \mathbf{N}^T \mathbf{b} \frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial \alpha_s} \right) t_e d\hat{\Omega} \\ & + \int_{\hat{\Gamma}_{t_e}} \left(\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \alpha_s} \mathbf{t} |\mathbf{J}| + \mathbf{N}^T \left(\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_s} \right) |\mathbf{J}| + \mathbf{N}^T \mathbf{t} \frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial \alpha_s} \right) d\hat{\Gamma}_t. \end{aligned}$$

全灵敏度推导

定义两个矩阵：

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial N_{n_{en}}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial N_{n_{en}}}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial N_{n_{en}}}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial N_{n_{en}}}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}.$$

(1) 等几何优化中P和W的全灵敏度：

$$|\mathbf{J}|' = |\mathbf{J}| \text{tr}(\mathbf{G}\mathbf{P}' + \mathbf{J}^{-1}\hat{\mathbf{G}}'\mathbf{P}),$$

$$\mathbf{G}' = \mathbf{J}^{-1}\hat{\mathbf{G}}'(\mathbf{I} - \mathbf{P}\mathbf{G}) - \mathbf{G}\mathbf{P}'\mathbf{G},$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{N}^T\mathbf{P}' + (\mathbf{N}')^T\mathbf{P},$$

$$N_i' = \frac{R_i w_i'}{\mathbf{R}^T \mathbf{W}} - \frac{R_i w_i \mathbf{R}^T \mathbf{W}'}{(\mathbf{R}^T \mathbf{W})^2},$$

$$(N_{i,\xi_j})' = \frac{R_{i,\xi_j} w_i'}{\mathbf{R}^T \mathbf{W}} - \frac{R_{i,\xi_j} w_i \mathbf{R}^T \mathbf{W}' + R_i w_i' (\mathbf{R}_{,\xi_j})^T \mathbf{W} + R_i w_i (\mathbf{R}_{,\xi_j})^T \mathbf{W}'}{(\mathbf{R}^T \mathbf{W})^2} + 2 \frac{R_i w_i (\mathbf{R}_{,\xi_j})^T \mathbf{W} \mathbf{R}^T \mathbf{W}'}{(\mathbf{R}^T \mathbf{W})^3}.$$

(2) 等几何优化中P的部分灵敏度：

$$|\mathbf{J}|' = |\mathbf{J}| \text{tr}(\mathbf{G}\mathbf{P}'),$$

$$|\mathbf{G}|' = -\mathbf{G}\mathbf{P}'\mathbf{G},$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{N}^T\mathbf{P}',$$

$$\mathbf{N}' = 0,$$

$$(N_{i,\xi_j})' = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \alpha_s} = \int_{\hat{\Omega}_e} \left(\frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \alpha_s} \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}| + \mathbf{B}^T \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \alpha_s} |\mathbf{J}| + \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial \alpha_s} \right) t_e d\hat{\Omega}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_e}{\partial \alpha_s} = & \int_{\hat{\Omega}_e} \left(\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \alpha_s} \mathbf{b} |\mathbf{J}| + \mathbf{N}^T \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_s} \right) |\mathbf{J}| + \mathbf{N}^T \mathbf{b} \frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial \alpha_s} \right) t_e d\hat{\Omega} \\ & + \int_{\hat{\Gamma}_{te}} \left(\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \alpha_s} \mathbf{t} |\mathbf{J}| + \mathbf{N}^T \left(\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_s} \right) |\mathbf{J}| + \mathbf{N}^T \mathbf{t} \frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial \alpha_s} \right) d\hat{\Gamma}_t. \end{aligned}$$

对于超弹性材料，由于其刚度矩阵与位移相关，材料矩阵无法直接由应力应变计算得到。这导致上述位移导数计算过程无法适用于超弹性材料，因此本文使用差分法求位移的导数。差分法思想是把定义域区间离散化，通过导数点的前后项的差商求得导数的近似值，本文使用差分法中的中心差分法求一阶偏导，首先对函数泰勒展开得到前项和后项的形式：

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x_i + \Delta x) &= \mathbf{u}(x_i) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \Delta x + O(\Delta x^2) \\ \mathbf{u}(x_i - \Delta x) &= \mathbf{u}(x_i) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \Delta x + O(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (4.25)$$

式（4.25）中两式相减得到位移偏导的近似形式：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \approx \frac{\mathbf{u}(x_i + \Delta x) - \mathbf{u}(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (4.26)$$

将位移对设计变量偏导代入不同的目标函数导数形式中，求得各设计变量灵敏度数值，接下来推导不同目标函数的导数形式。

根据式（4.2），柔度对设计变量的导数形式为：

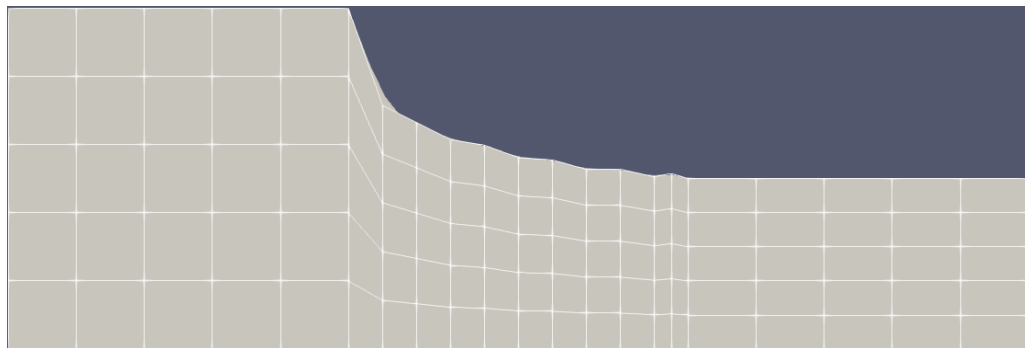
$$\frac{df}{dx_i} = \mathbf{F}'^T \mathbf{u} + \mathbf{F}^T \mathbf{u}' = 2\mathbf{u}^T \mathbf{F}' - \mathbf{u}^T \mathbf{K}' \mathbf{u} \quad (4.27)$$

根据式（4.3），位移对设计变量的导数形式为：

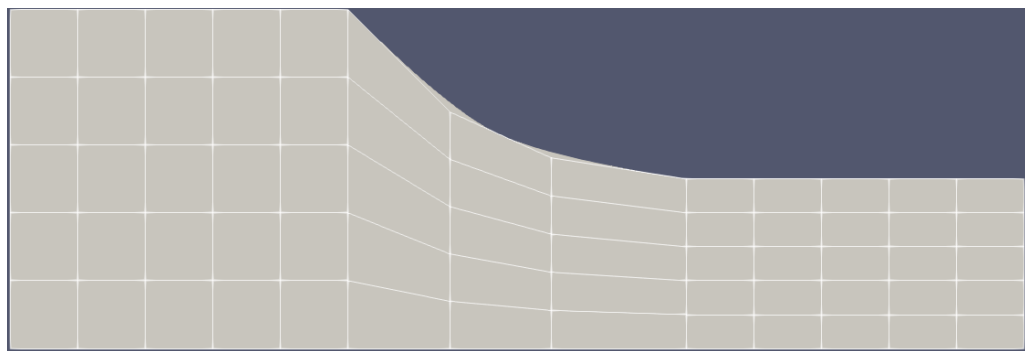
$$\frac{df}{dx_i} = \mathbf{I}^T (\mathbf{u}^h)' = \mathbf{I}^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{F}' - \mathbf{K}' \mathbf{u}) \quad (4.28)$$

此处的 $\mathbf{u}^h$ 为各控制点上的位移系数。

设计模型：粗网格，用于控制形状变化
分析模型：细网格，用于计算灵敏度



细网格



粗网格



在形状优化时本文将设计模型和分析模型分开，设计模型使用未加细的样条模型，分析模型使用加细后的样条模型。由 2.1.3 节可知，样条细分后的模型和原模型存在双射关系，分析模型的灵敏度值可传递到原设计模型的设计变量上。因此，设计模型可用分析模型的灵敏度信息进行优化，再将优化后的控制点坐标映射到分析模型上实现分析模型的外形改变，完成一次优化迭代过程。

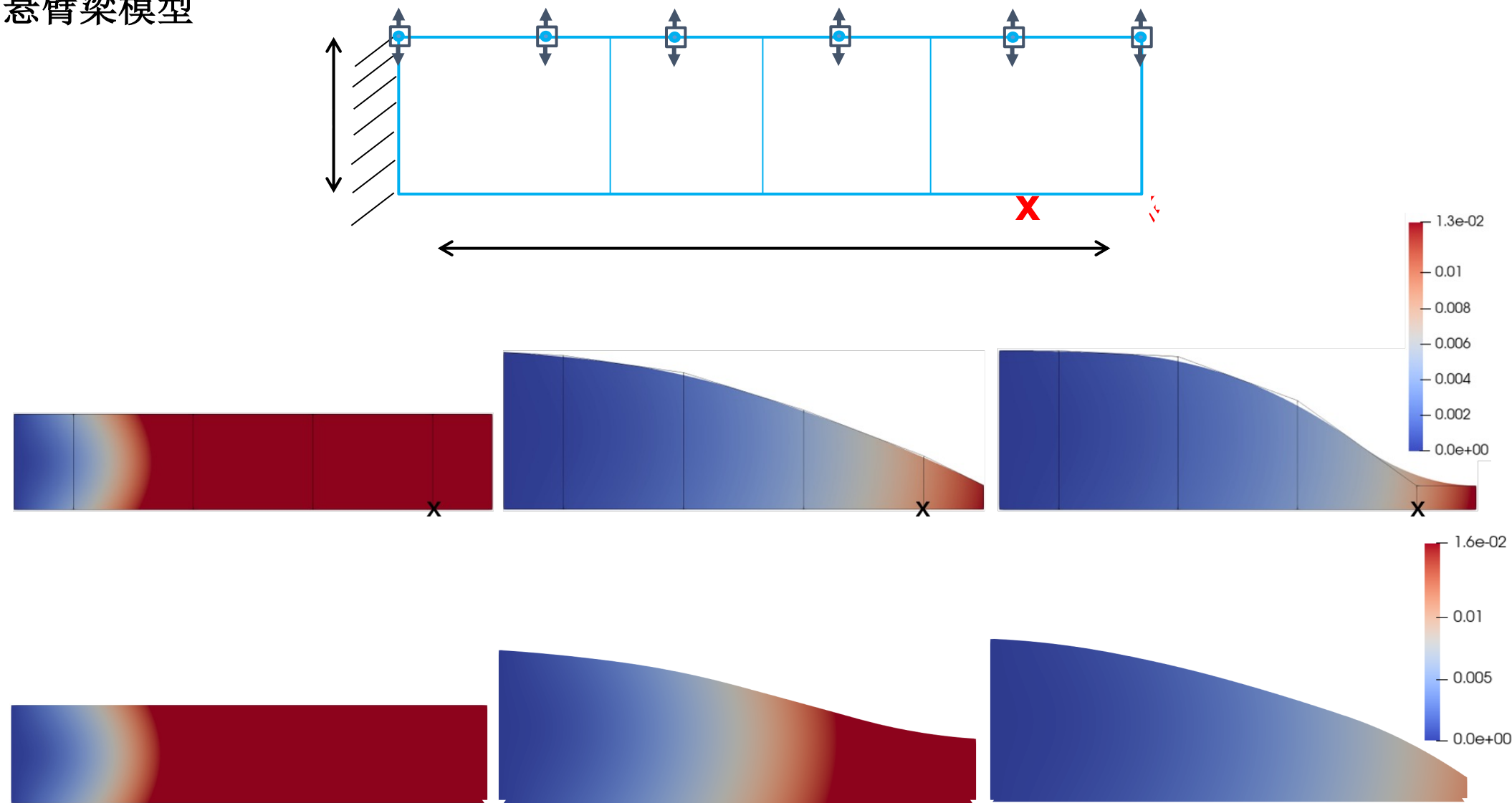
根据公式 (2.10) 的节点插入方式得到 NURBS 样条下的灵敏度传递公式，形式如下：

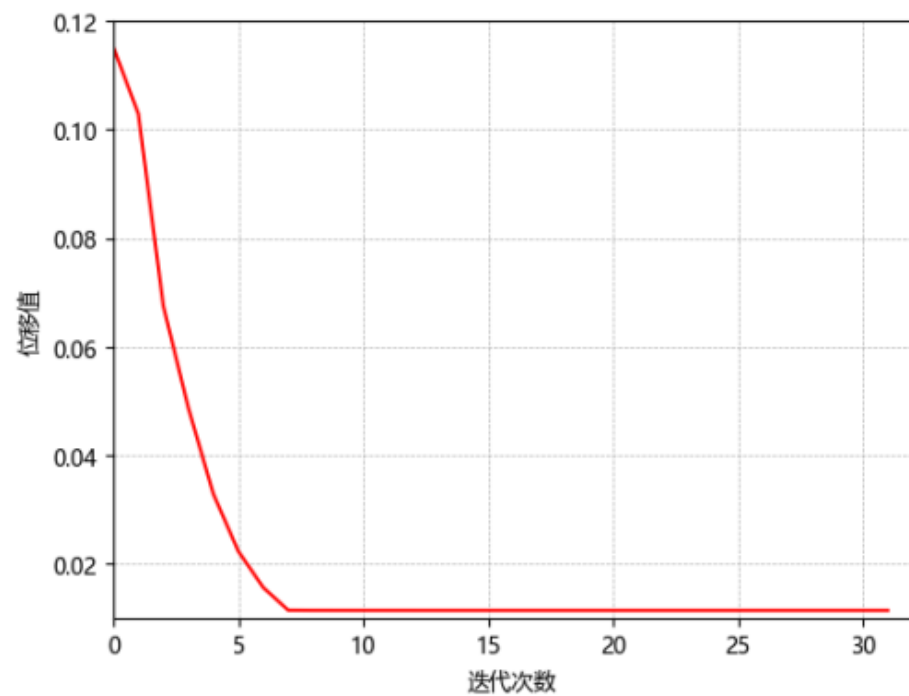
$$Q'_i = \frac{(1 - \alpha_i)P'_{i-1}w_{i-1} + \alpha_i P'_i w_i}{(1 - \alpha_i)w_{i-1} + \alpha_i w_i} \quad (4.34)$$

其中 P_i 和 w_i 是原模型节点插入位置的下一个控制点的坐标和权值， α_i 的计算方式在式 (2.10) 中有详细描述，不再赘述。式 (4.34) 给出了 NURBS 曲线细分

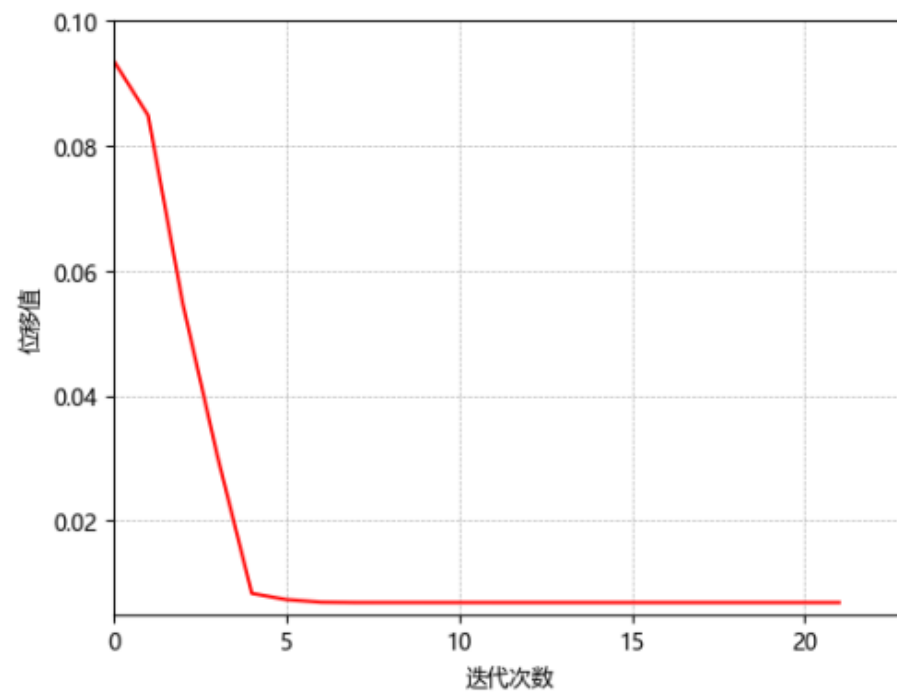
后模型的灵敏度传递方程，B 样条曲线只需将权值设置为 1 即可。NURBS 曲面和实体由多维控制点和节点向量定义，通过重复式 (2.10) 中的插入过程和上式控制点灵敏度传递过程，可以在 2D 曲面和 3D 实体中实现高精度的灵敏度传递过程。方程中的传递过程是可逆的，粗网格模型的设计变量移动后可以将位移量映射到细网格模型中，完成细分模型的更新。由于节点的更新由原映射方程实现，更新后的样条保持了原样条的光滑结果。

悬臂梁模型





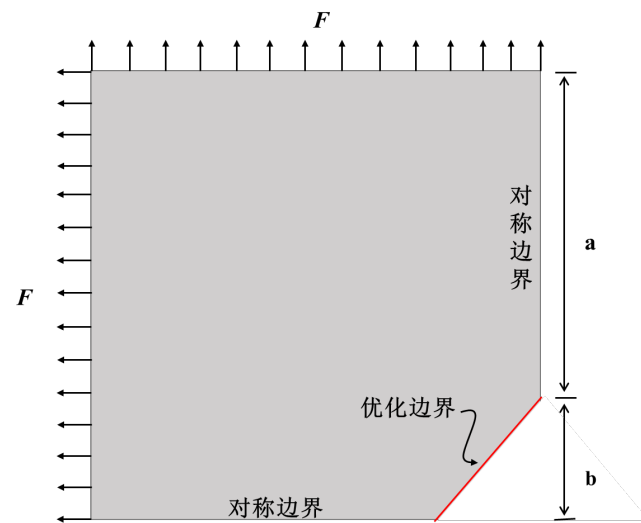
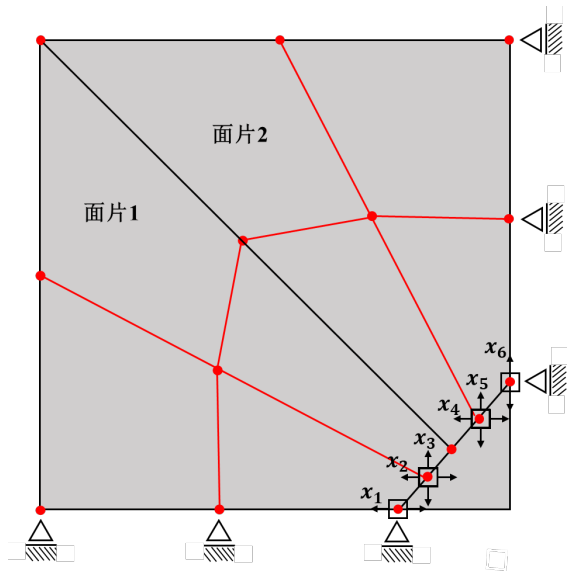
(a) 优化方案 1



(b) 优化方案 2

图4.5 悬臂梁形状优化迭代历史

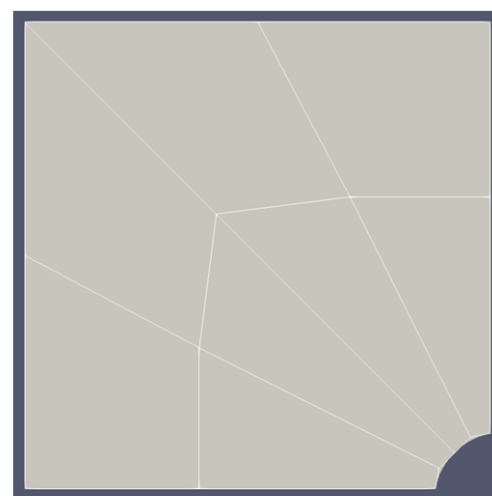
带孔平板模型



$$V \leq 0.96V^*$$

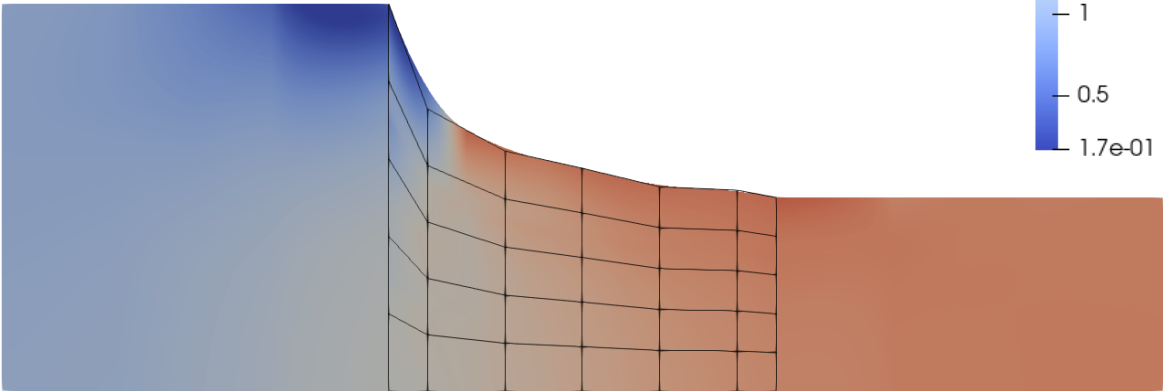
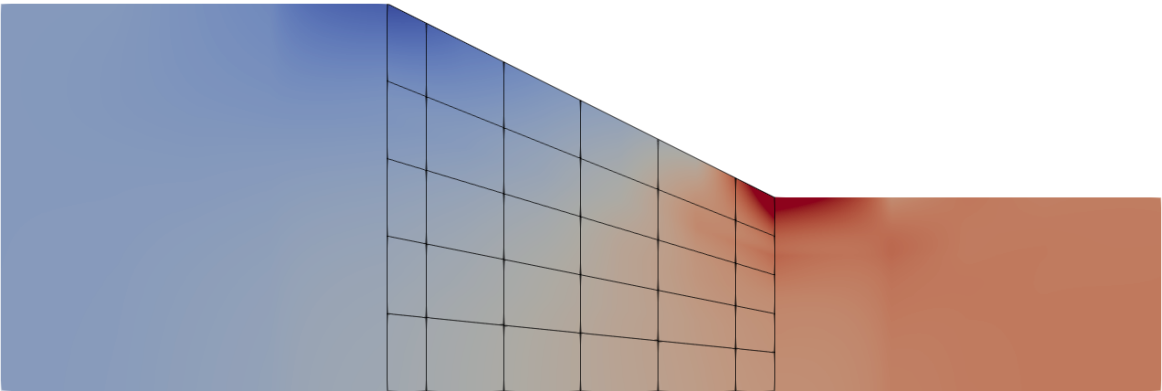
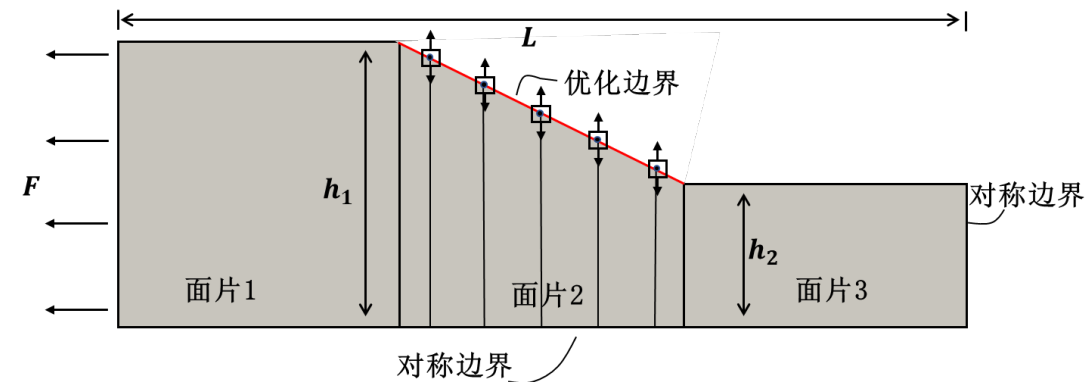


$$V \leq V^p$$



$$V \leq 0.99V^*$$

圆角板



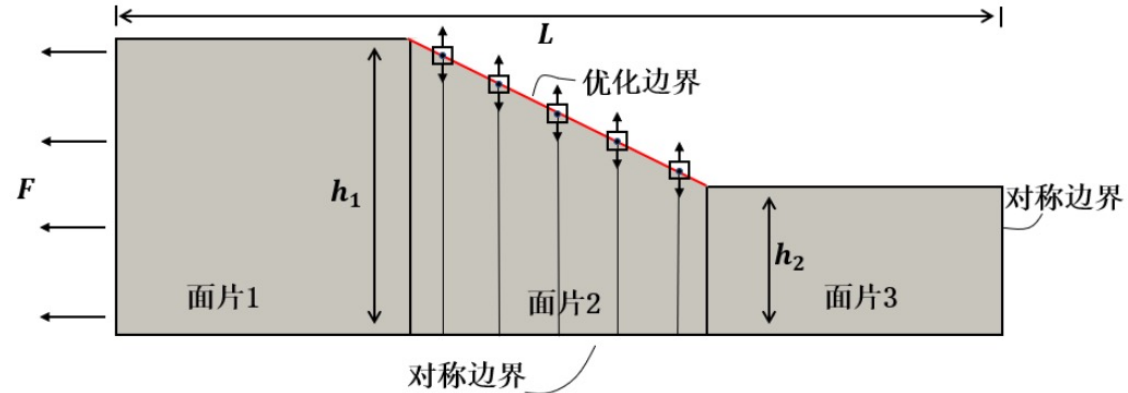


图4.16 圆角板初始模型和参数信息

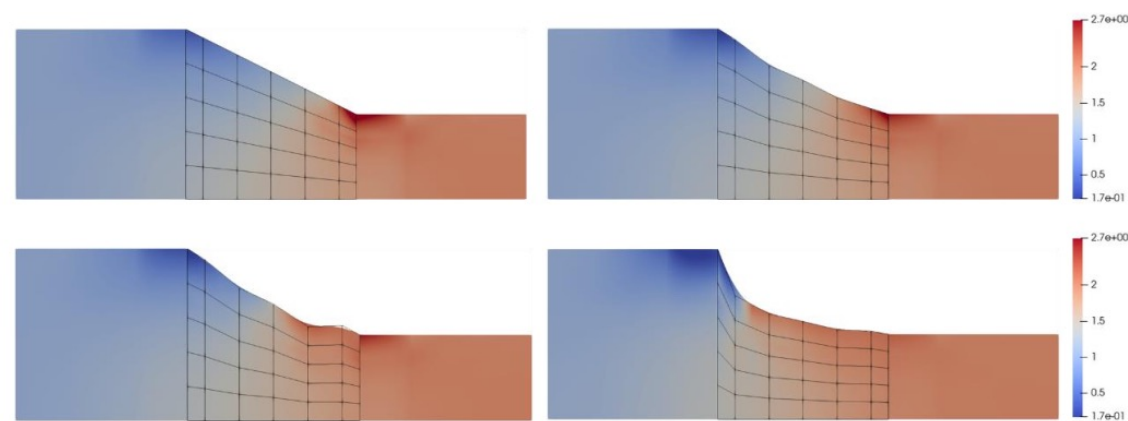


图4.17 圆角板线弹性下形状优化结果应力分布情况

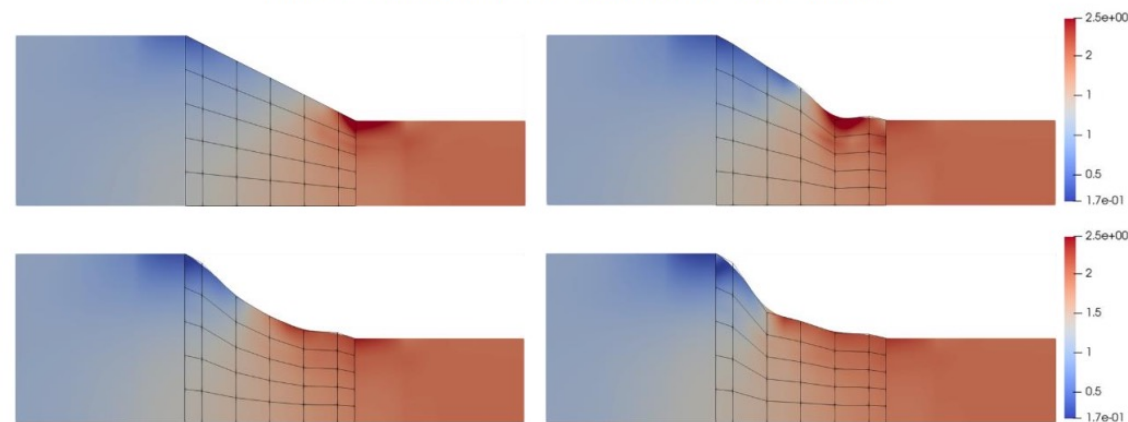
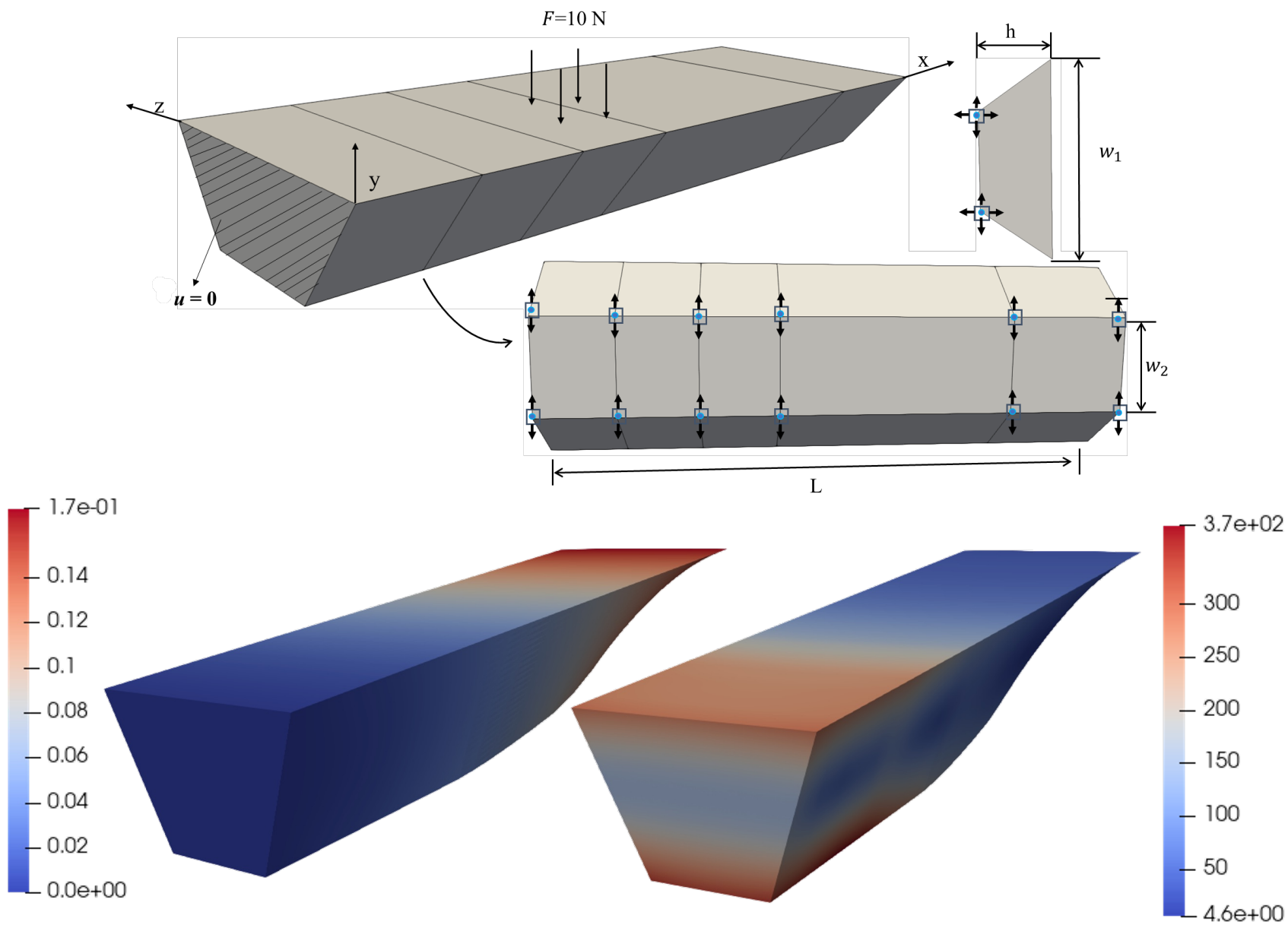


图4.18 圆角板超弹性下形状优化结果应力分布情况

体积梁模型



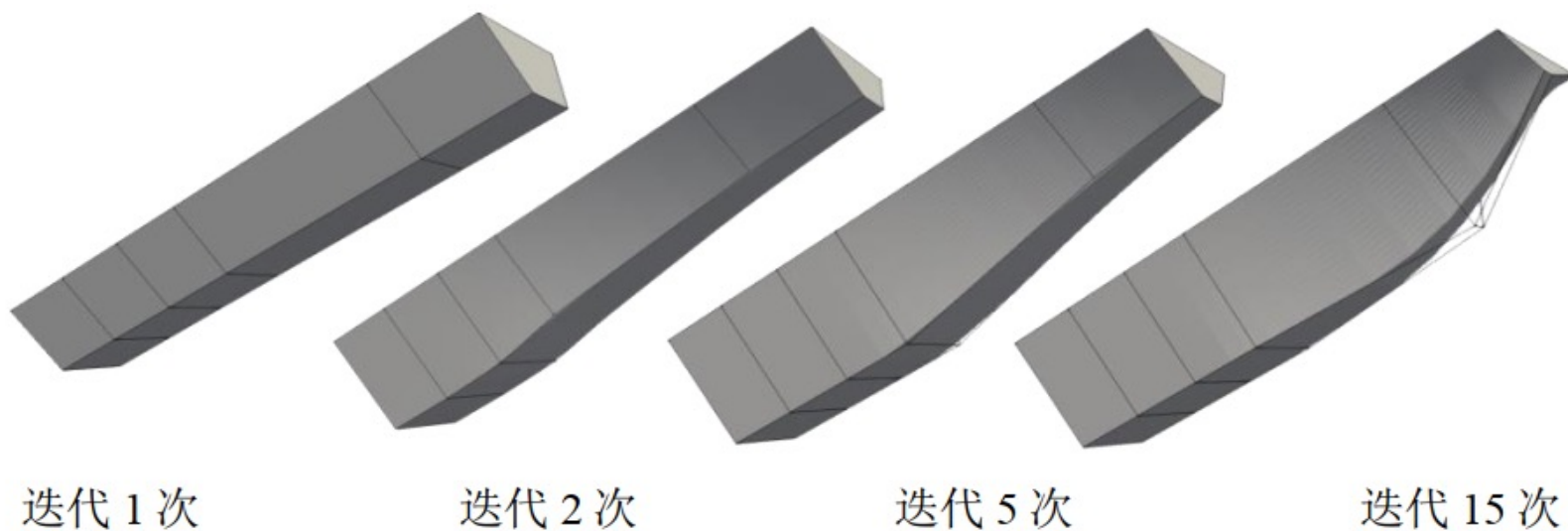
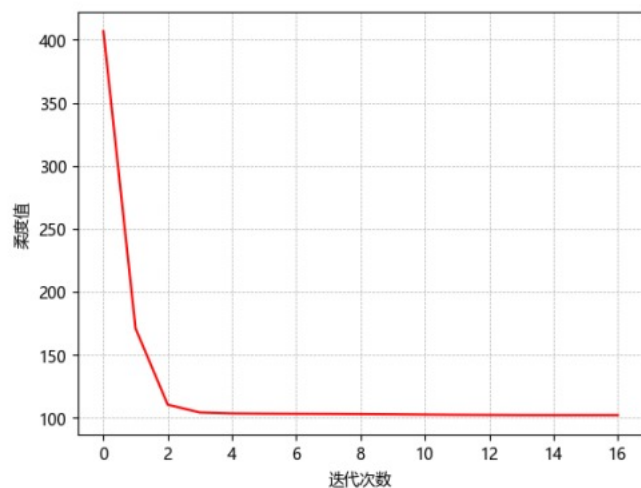
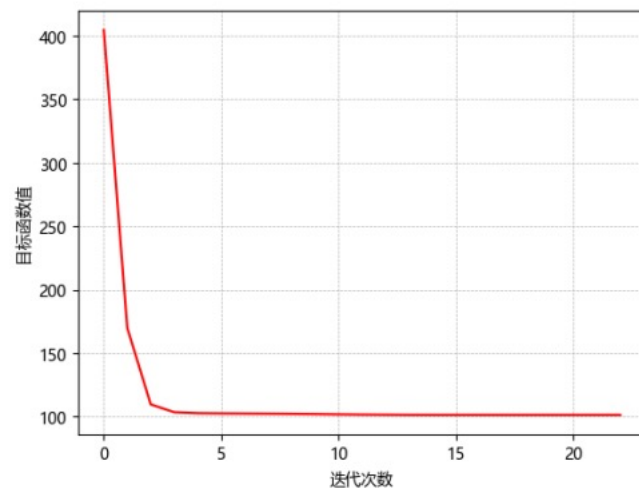


图4.10 体积梁迭代优化过程



(a) 超弹性材料



(b) 线弹性材料

图4.11 体积梁形状优化迭代历史

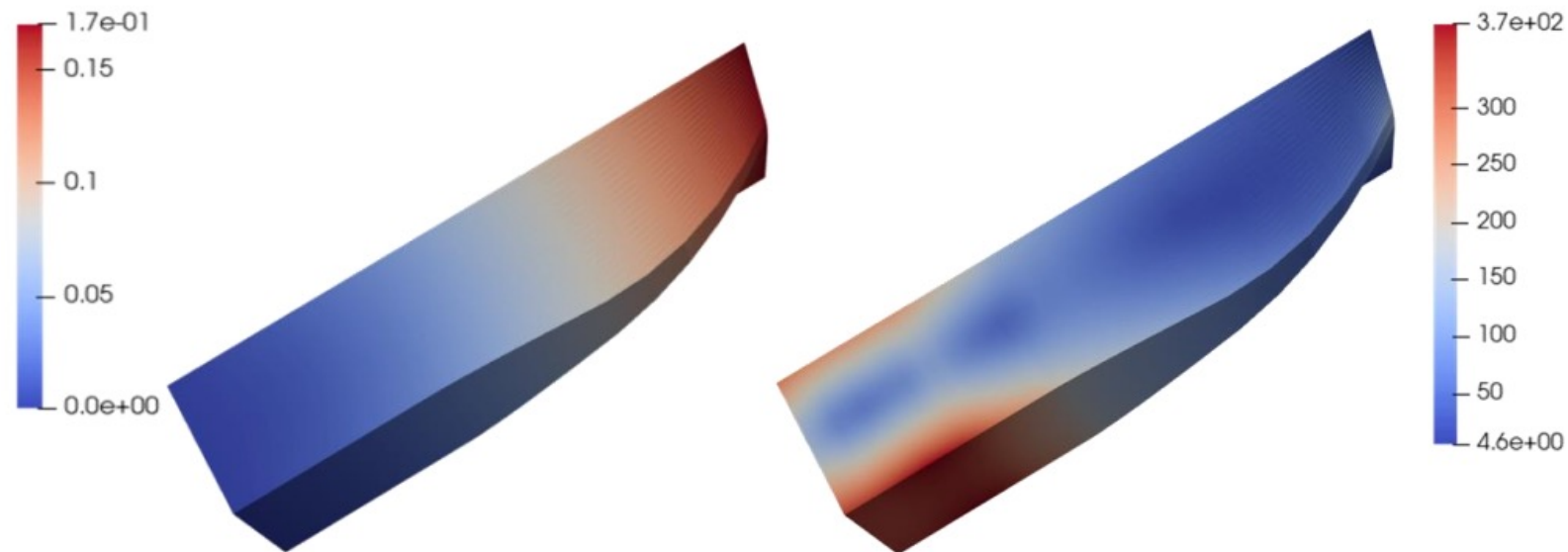
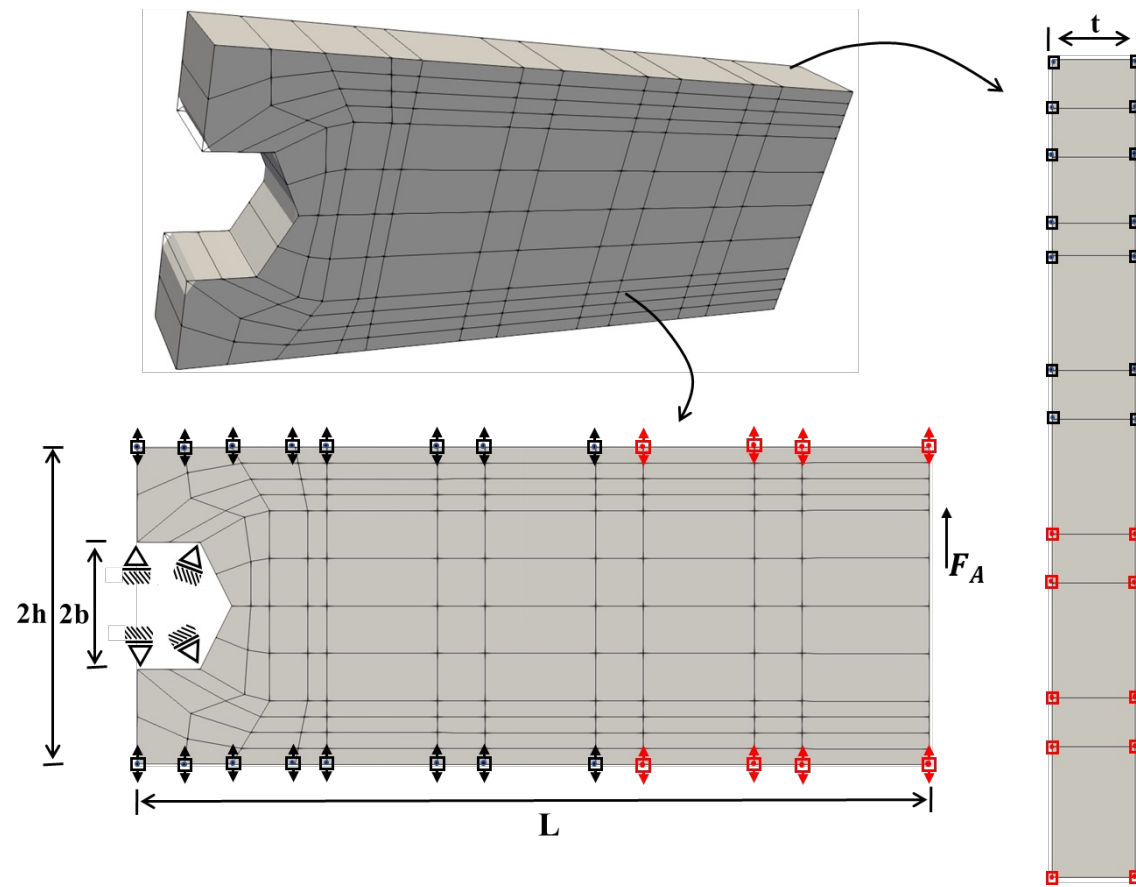


图4.12 体积梁线弹性仿真下形状优化位移（左）和应力（右）结果

开口扳手模型



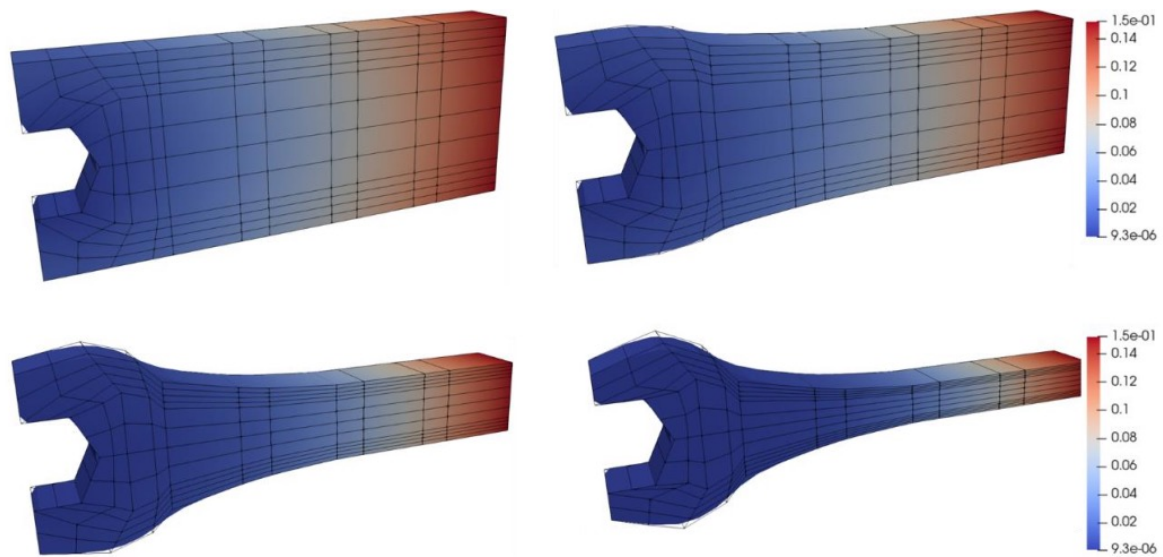


图4.20 开口扳手线弹性下形状优化

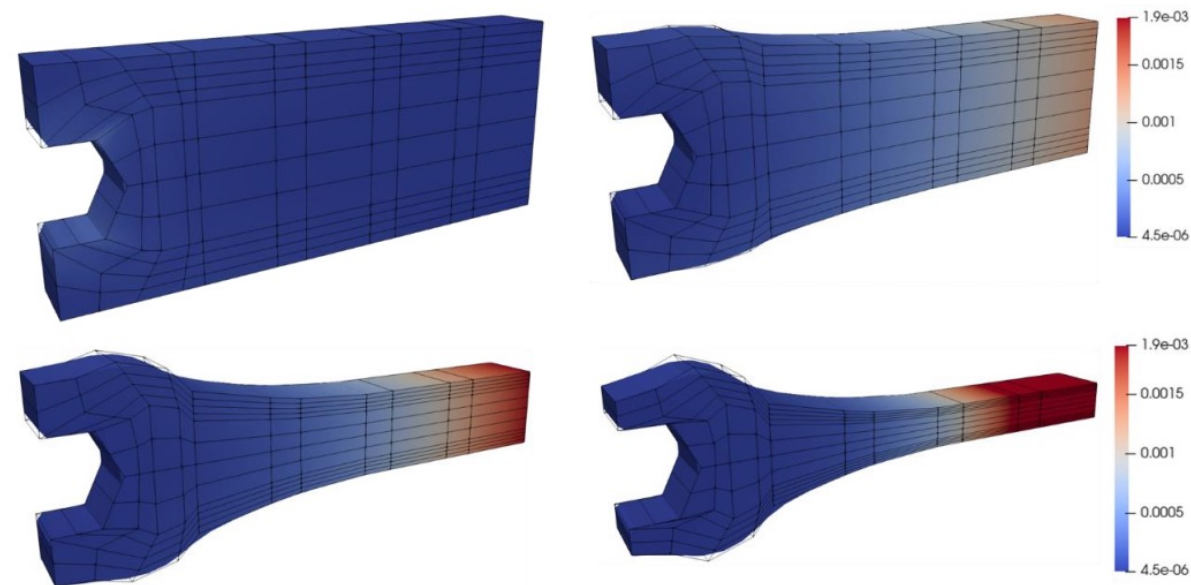


图4.21 开口扳手超弹性下形状优化



智能可视建模与仿真实验室

Intelligent Visual Modeling & Simulation (iGame) Lab

Thank You!

Q & A