



智能可视建模与仿真实验室

Intelligent Visual Modeling & Simulation (iGame) Lab

第八讲

基于等几何分析的超弹性问题求解 及等几何配点法

姓名：徐岗

杭州电子科技大学 计算机学院

电子邮箱：g xu@hdu.edu.cn

目 录

1. 超弹性问题求解

2. 等几何配点法

- 几何非线性问题：发生在必须考虑大位移和旋转的问题中，就像在电缆、框架、膜或壳体等结构元件中一样，但应变仍然很小；
- 有限形变问题：不仅位移很大，而且应变也很大，在金属成型或轮胎力学等问题中可能会发生有限变形；
- 材料非线性：材料行为的特征是应力和应变之间的非线性响应函数或一组演化方程，如粘弹性聚合物和弹塑性材料（钢铁、混凝土等）；
- 稳定性问题：这些不稳定性的起源是平衡方程的不稳定性，如壳体的屈曲、贯穿行为；
- 非线性边界条件：以边界产生的非线性为特征的问题与两个物体之间的接触或变形相关的载荷有关；
- 耦合问题：当描述不同场之间的互相作用时会出现非线性问题。

超弹性问题的是一种非线性弹性问题，是材料非线性中最简单的一类问题。这类问题的IGA与线性问题类似，同样可以分为离散化、单元分析和总体分析三个过程。

先来说明下问题的几个方程：

(1) 本构方程：

对于非线性弹性介质，应力和应变之间不是线性关系。应力和应变可以写作全量形式：

$$\sigma = D_S \varepsilon$$

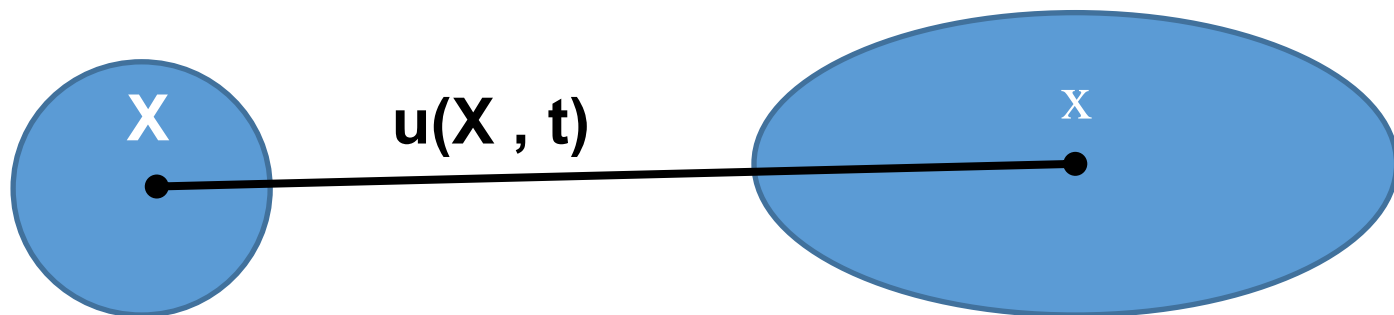
也可以写作增量形式：

$$d\sigma = D_T d\varepsilon$$

其中 D_S 和 D_T 分别是割线和切线的弹性材料矩阵，它们的元素是应变或应力的函数。

2. 超弹性问题

要描述物质的形变一般常使用形变梯度这一概念：



上图描述了物体经过时间 t 的状态移动，物体质点空间坐标表示为 $X \in \Omega$ ，其中 X 表示物体的初始状态；物体当前运动的时刻 t 状态为 Ω_t 称为当前构型，此时物质坐标表示为 $x \in \Omega_t$ ，质点的运动用映射 φ 表示，因此物体的位移矢量场 u 可以表示为：

$$u(X) = x - X = \varphi(X, t) - X$$

为描述运动前后物质坐标变化关系，引入形变梯度：物体的当前坐标 x 相对于初始坐标 X 的偏导数

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} = I + \frac{\partial u}{\partial X} = I + \nabla u_x$$

常见的超弹性材料模型通常由应变能密度函数定义，应变能密度函数描述了应变和应力的之间的关系。应变能密度函数是形变的函数，表示为 $\psi(F)$ 。在各向同性材料中常使用的表示方式：

①使用柯西应变 $\mathbf{C}$ 的不变量表示 $\tilde{\psi}(I, II, III)$;

②使用主拉伸 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 表示;

③使用可分离的形式表示。

1. $\mathbf{F}$ 为形变梯度，其行列式 $J = \det(\mathbf{F})$

2. $\mathbf{C}$ 为柯西应变，使用形变梯度计算， $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$;
柯西不变量为 $I = \text{tr}(\mathbf{C}), II = \text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{C}), III = \det(\mathbf{C})$;

3. $\mathbf{G}$ 为格林应变， $\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$;

3. 主拉伸为形变梯度经过SVD分解后，对角矩阵的对角元素。

2. 超弹性问题

St.Venant-Kirchhoff模型:

$$\psi = \frac{\lambda}{2} \text{tr}^2(G) + \mu \text{tr}(G^2)$$

Neo-Hookean模型:

$$\psi = \frac{\mu}{2} (I_C - 3) + \mu \log J + \frac{\lambda}{2} (\log J)^2$$

Mooney-Rivlin模型:

$$\psi = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} C_{rs} (I - 3)^r (II - 3)^s$$

Ogden模型:

$$\Psi = \sum_{p=1}^n \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3)$$

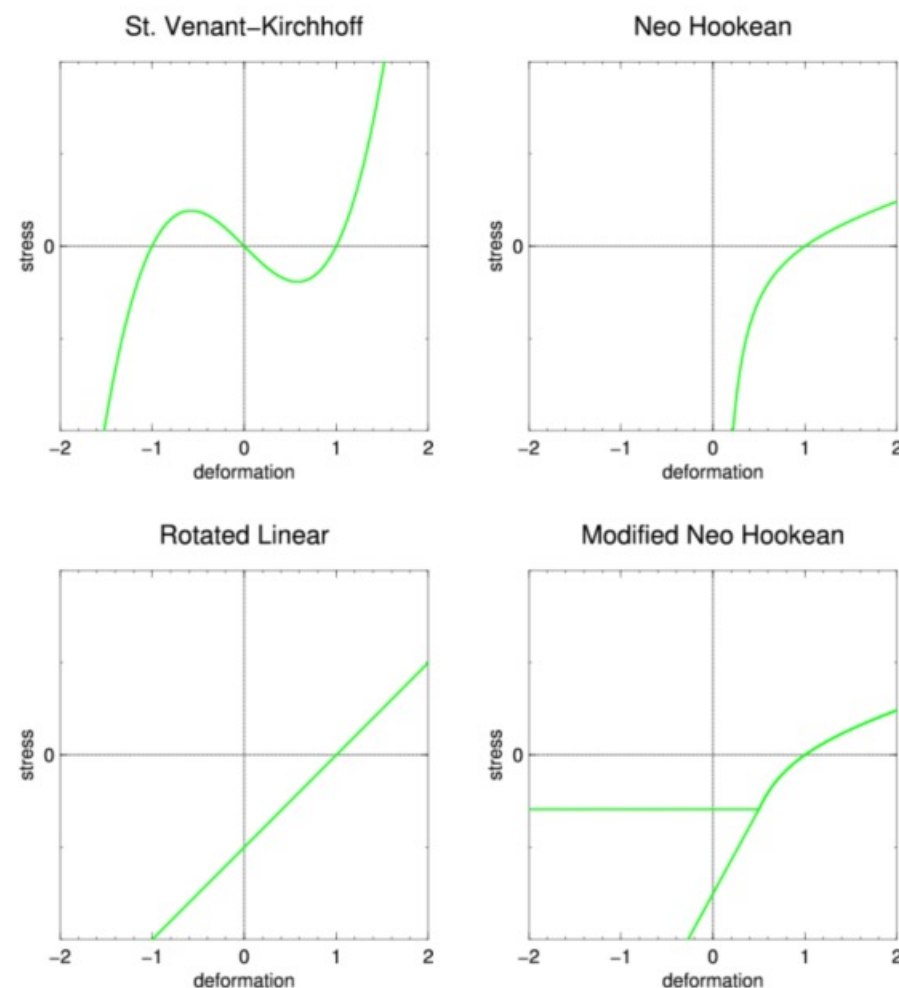


Figure 3: The relationship between the first Piola-Kirchhoff stress $\hat{\mathbf{P}}$ and the deformation gradient $\hat{\mathbf{F}}$ for various constitutive models.

(2)几何方程

几何方程用来描述形变和位移之间的关系，在线性弹性问题中：

$$\varepsilon = Bu, \quad B = LN$$

但在实际中：

$$G = \frac{1}{2}(F^T F - I) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u) = G_L + G_N$$

在线弹性问题中使用了工程应变 ε ,是格林应变 $\mathbf{G}$ 的线性部分 G_L ，忽略了应变的非线性部分 G_N ，当处理小形变时，非线性部分可以忽略不计；但当处理大形变时，非线性部分就不能忽略。

(3)平衡方程

在拉格朗日构型中建立局部微分平衡方程的强形式。对任意时间 t ,物体从状态 $\Omega \rightarrow \Omega_t$ 需要满足质量守恒, 即 $\rho_0 = J\rho$, 其中, ρ_0 是物体初始质量密度, ρ 是物体当前质量密度。由线动量守恒可以得到:

$$\int_{\Omega_t} \rho \dot{u} dv = \int_{\Omega} \rho_0 \dot{u}_0 dV$$

由线动量定理可得, 物体受到的所有外力大小等同于物体线动量对时间的导数, 由此可以得出物体的平衡方程:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_X \mathbf{FS} d\Omega + \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{b}_0 d\Omega &= \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{g}} \quad \text{on } \Gamma_D \\ \mathbf{FSn} &= \mathbf{t} \quad \text{on } \Gamma_N \\ \mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) &= \hat{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{b}_0$ 是物体每单位受到的体积力, $\ddot{\mathbf{u}}$ 是加速度, $\dot{\mathbf{u}}$ 是速度;

$\bar{\mathbf{g}}$ 是边界 Γ_D 上的固定位移条件, $\mathbf{t}$ 是边界 Γ_N 上每单位面积受到的牵引力, $\mathbf{n}$ 是边界上的单位外法线

2. 超弹性问题

根据弹性力学方程和动量守恒，构建物体动力学方程形式：

$$\int_{\Omega} \nabla_X \mathbf{F} \mathbf{S} d\Omega + \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{b}_0 d\Omega = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}$$

其中 $\mathbf{S}$ 为第二类皮奥拉-克希荷夫应力张量，是能量密度函数对格林应变的导数。

根据变分原理和分部积分得到等效积分弱形式：

$$\int_{\Omega} \rho_0 \delta \mathbf{u} \ddot{\mathbf{u}}^h d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{G} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}^h) d\Omega = \int_{\Omega} \rho_0 \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}_0 d\Omega + \int_{\Gamma_N} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma$$

根据能量密度函数可以将第二类皮奥拉-克希荷夫应力张量求出： $\mathbf{S} = \frac{d\Psi}{d\mathbf{G}} = 2 \frac{d\Psi}{d\mathbf{C}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \lambda \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \\ \mathbf{D}_T &= (\lambda + 2\mu) \mathbf{I} \end{aligned}$$

St.Venant-Kirchhoff 模型

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &= 2\mu \left(J^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} I_1 J^{-\frac{8}{3}} \mathbf{C}^{-1} \right) + \lambda (J - 1) \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbb{D} &= \lambda \mathbf{C}_{ij}^{-1} \mathbf{C}_{kl}^{-1} + (u - \lambda \ln J) (\mathbf{C}_{ik}^{-1} \mathbf{C}_{jl}^{-1} + \mathbf{C}_{il}^{-1} \mathbf{C}_{jk}^{-1}) \end{aligned}$$

修正的 Neo-Hookean 模型

2. 超弹性问题

根据变分原理和分部积分得到等效积分弱形式：

$$\int_{\Omega} \rho_0 \delta \mathbf{u} \ddot{\mathbf{u}}^h d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{G} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}^h) d\Omega = \int_{\Omega} \rho_0 \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}_0 d\Omega + \int_{\Gamma_N} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma$$

现在我们需要将连续的公式在等几何分析的框架下进行离散化：

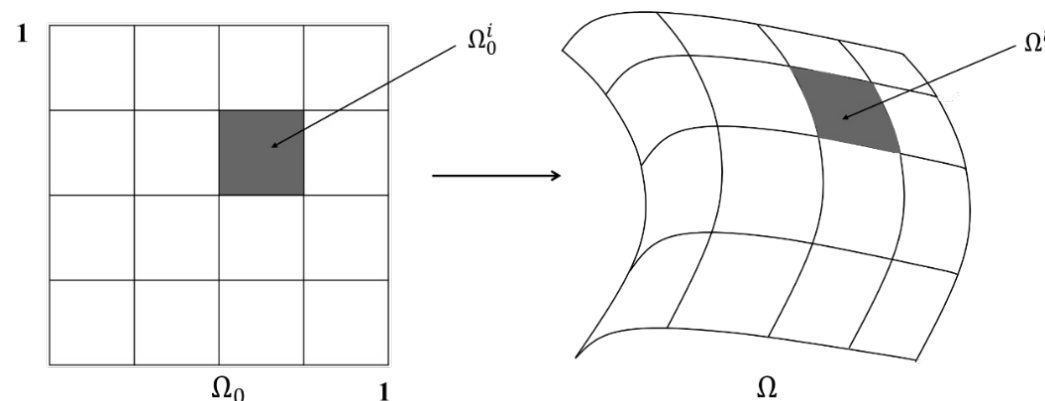
①位移： $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^n N_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_e = \mathbf{N} \mathbf{u}_e$

②形变梯度： $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^n u_i(t) \frac{dN_i}{d\xi}(\varphi^{-1}(\mathbf{x})) \delta \mathbf{u}$

③格林应变： $\mathbf{G} = \mathbf{B}_L \mathbf{u}_e + \overline{\mathbf{B}}_N \mathbf{u}_e = \overline{\mathbf{B}} \mathbf{u}_e$

其中 $\overline{\mathbf{B}}_N = \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \mathbf{x}} I & \frac{\partial N}{\partial \mathbf{x}} I & \frac{\partial N}{\partial \mathbf{x}} I \end{bmatrix}^T$

④ $\delta \mathbf{G} = \mathbf{B}_L \delta \mathbf{u}_e + \mathbf{A} \mathbf{Q} \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}_e$



参数单元和物理单元的映射

根据平衡方程的等效积分弱形式和各物理量在等几何分析框架下的离散化形式可以得到平衡方程在等几何分析框架下的离散化形式：

$$\int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{N}_i \mathbf{I} \mathbf{N}_j d\Omega \ddot{\mathbf{u}}_j + \int_{\Omega} \mathbf{B}_i \mathbf{S}(\mathbf{u}_e) d\Omega = \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{N}_i \mathbf{b}_0 d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{N}_i \mathbf{t} d\Gamma$$

将上述离散化形式简记为：

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{R} = \mathbf{F}$$

其中 $\mathbf{M}$ 表示运动产生惯性力的，在解静力问题时这一项为0； $\mathbf{R}$ 为形变引起的内力； $\mathbf{F}$ 是外力。

2. 超弹性问题

在超弹性静力学问题中，将惯性力部分舍去，其剩余部分表示为：

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{B} \mathbf{S} \, d\Omega - \mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{B} \mathbf{S} \, d\Omega - \int \rho_0 \mathbf{N}_i \mathbf{b}_0 \, d\Omega + \int \mathbf{N}_i \mathbf{t} \, d\Gamma = 0$$

本构关系满足：

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}(\mathbf{G})\mathbf{G}$$

代入上述离散平衡方程得到：

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} \, d\Omega^e$$

$\mathbf{B}^T$ 和 $\bar{\mathbf{B}}$ 均为位移函数，但两者形式不同，因此上述方程为非线性方程，且 $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ 是非对称的。

2. 超弹性问题

为求解静态问题中的非线性方程，这里使用**牛顿迭代法**。

牛顿迭代法是一种非线性方程数值求根的迭代算法，它根据方程的泰勒展开式的前两项求解 $\mathbf{r}(\mathbf{u})=0$ 的根，其特点是在计算时需要求得函数值与其一阶导数值，迭代数值沿着函数的梯度方向下降，因此需要求得方程的导数形式。

对 $\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{S} d\Omega - \mathbf{F}$ 求一阶导数可得切线刚度矩阵：

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T d\mathbf{S} d\Omega + \int_{\Omega} d\mathbf{B}^T \mathbf{S} d\Omega$$

将切线刚度矩阵 $\mathbf{K}_T$ 分为两个部分求解。

①第一个部分为：

$$\mathbf{B}^T d\mathbf{S} = \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T d\mathbf{G} = \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} d\mathbf{u} = \mathbf{K}_D d\mathbf{u}$$

将 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_N$ 展开，得：

$$\mathbf{K}_D = \int_{\Omega} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_N + \mathbf{B}_N^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_N^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_N d\Omega$$

2. 超弹性问题

将 $B = B_L + B_N$ 展开, 得:

$$\mathbf{K}_D = \int_{\Omega} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_N + \mathbf{B}_N^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_N^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_N d\Omega$$

该式的第一部分 $\mathbf{K}_L = \mathbf{B}_L^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_L$ 是小位移刚度矩阵, 在线弹性问题中仅涉及该项;
第二部分 $\mathbf{K}_N = \mathbf{B}_L^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_N + \mathbf{B}_N^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_N^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_N$ 是与大形变关联的刚度矩阵。

②对于 $\mathbf{K}_T$ 的第二项, 由于 $\mathbf{B}_L$ 和 $\mathbf{Q}$ 与位移无关, 因此有

$$d\mathbf{B}^T \mathbf{S} = (d\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q})^T \cdot \mathbf{S} = \mathbf{Q}^T \cdot (d\mathbf{A})^T \cdot \mathbf{S} = \mathbf{K}_s du$$

容易推导出: $(d\mathbf{A})^T \cdot \mathbf{S} = \hat{\mathbf{M}} \mathbf{Q} du$

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} S_{11} I_{3 \times 3} & S_{12} I_{3 \times 3} & S_{13} I_{3 \times 3} \\ S_{12} I_{3 \times 3} & S_{22} I_{3 \times 3} & S_{23} I_{3 \times 3} \\ S_{13} I_{3 \times 3} & S_{23} I_{3 \times 3} & S_{33} I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

所有得出: $\mathbf{K}_s = d\mathbf{B}^T \mathbf{S} = \int_{\Omega} \mathbf{Q}^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{Q} d\Omega$

2. 超弹性问题

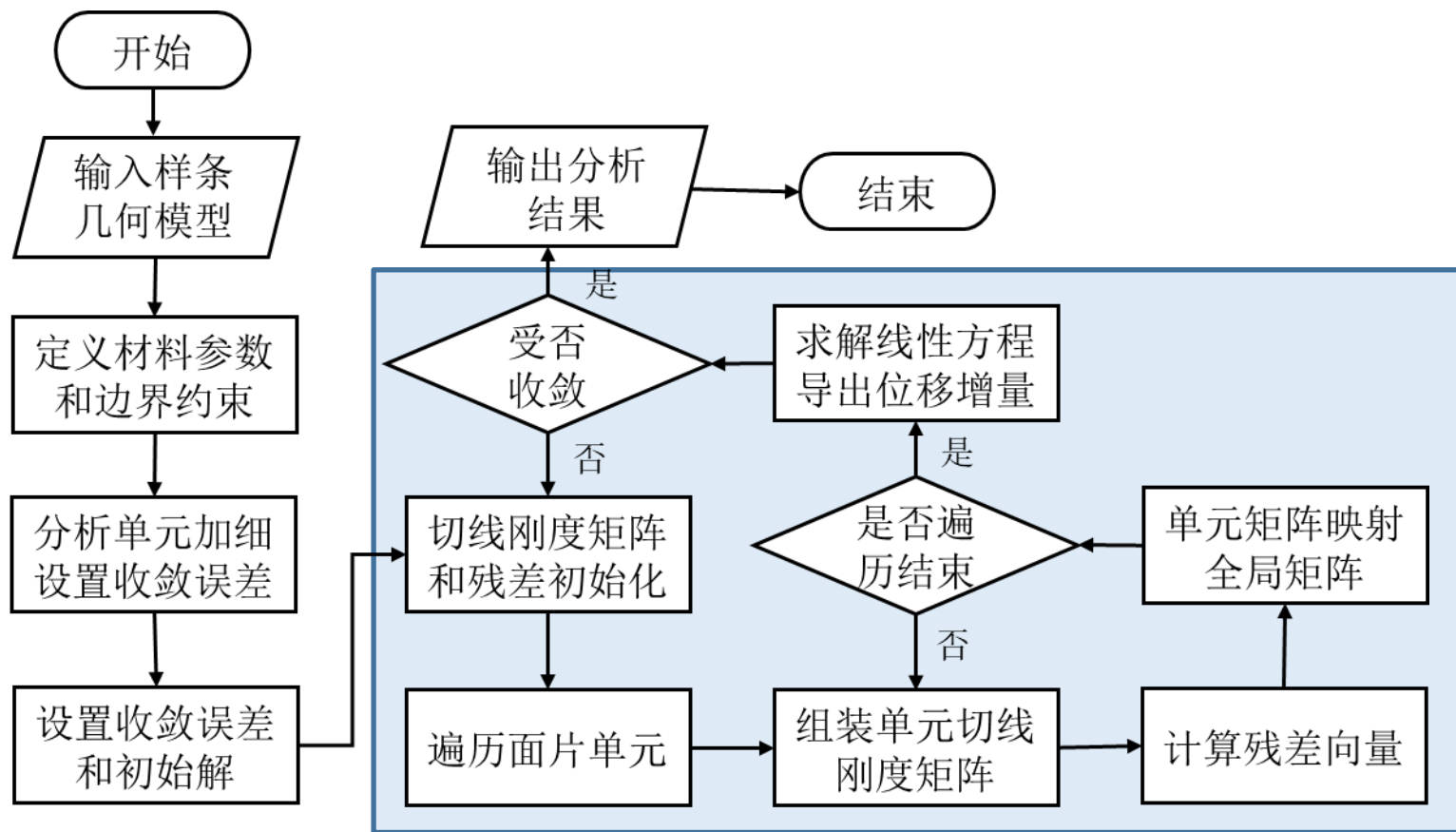
根据①②的结论可以求得 $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_D + \mathbf{K}_S$

下面是牛顿迭代法的步骤：

1. 设定初始值 $\mathbf{u}_0$
2. 组装好 $\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_n)$
3. 求出偏移量 $\Delta \mathbf{u}_n = \mathbf{K}_T(\mathbf{u}_n)^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{K}_T(\mathbf{u}_n))$
4. 求出 $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}_n$, $n += 1$; 重复第2, 3, 4步

牛顿迭代法所需的导数和函数值装配方式如上所述，除此之外还需要设定一个初始猜测值 $\mathbf{u}_0$ 。初值会在多次迭代后收敛到解的邻域内，通常设置初值为零，但如果初值设定离解太远可能导致无法收敛或收敛过慢，因此可以根据具体问题和设定方法定义一个更合理的初值。

2. 超弹性问题



超弹性静力问题等几何分析流程

2. 超弹性问题

读模型文件：读xml文件 `ToolFunc::readFileXml(文件路径, std::vector<CBSplineSolid> patch);`

创造约束面：

1. 创造边界集合类： `std::vector<boundary_condition> m_dirichletSides, m_neumannSides;`
2. 添加边界： `m_dirichletSides.push_back(boundary_condition)`

初始化构造切线刚度矩阵和载荷向量的稀疏矩阵系统

`stiffAssembler stiff(patch, m_dirichletSides, m_neumannSides);`

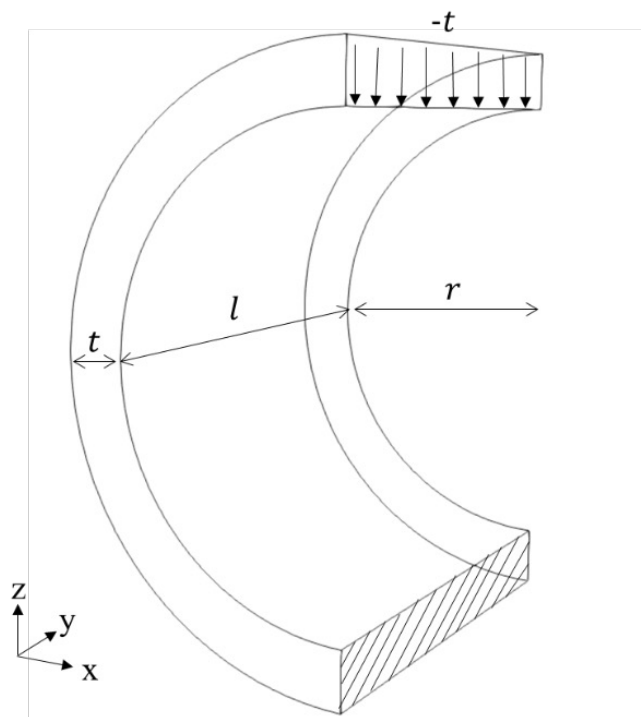
初始化位移和速度(设0)

装配切线刚度矩阵stiff

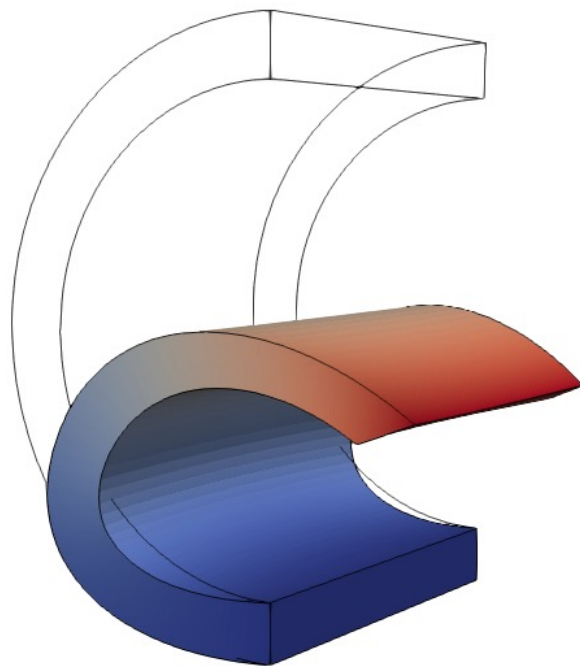
求解位移 u ,判断收敛

将位移添加到模型各控制点上，后处理，进行形变可视化

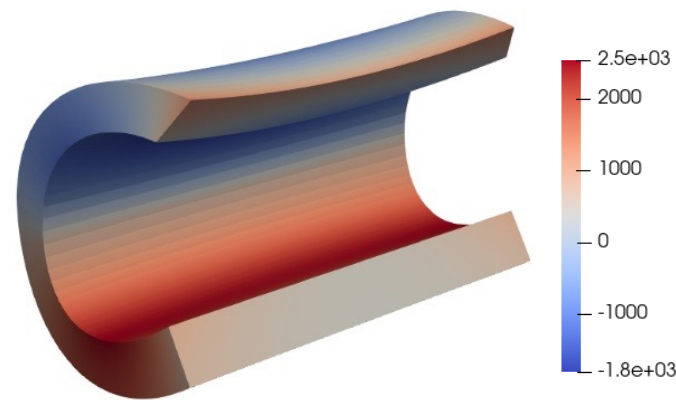
2. 超弹性问题



二分之一厚壁圆柱



位移分布



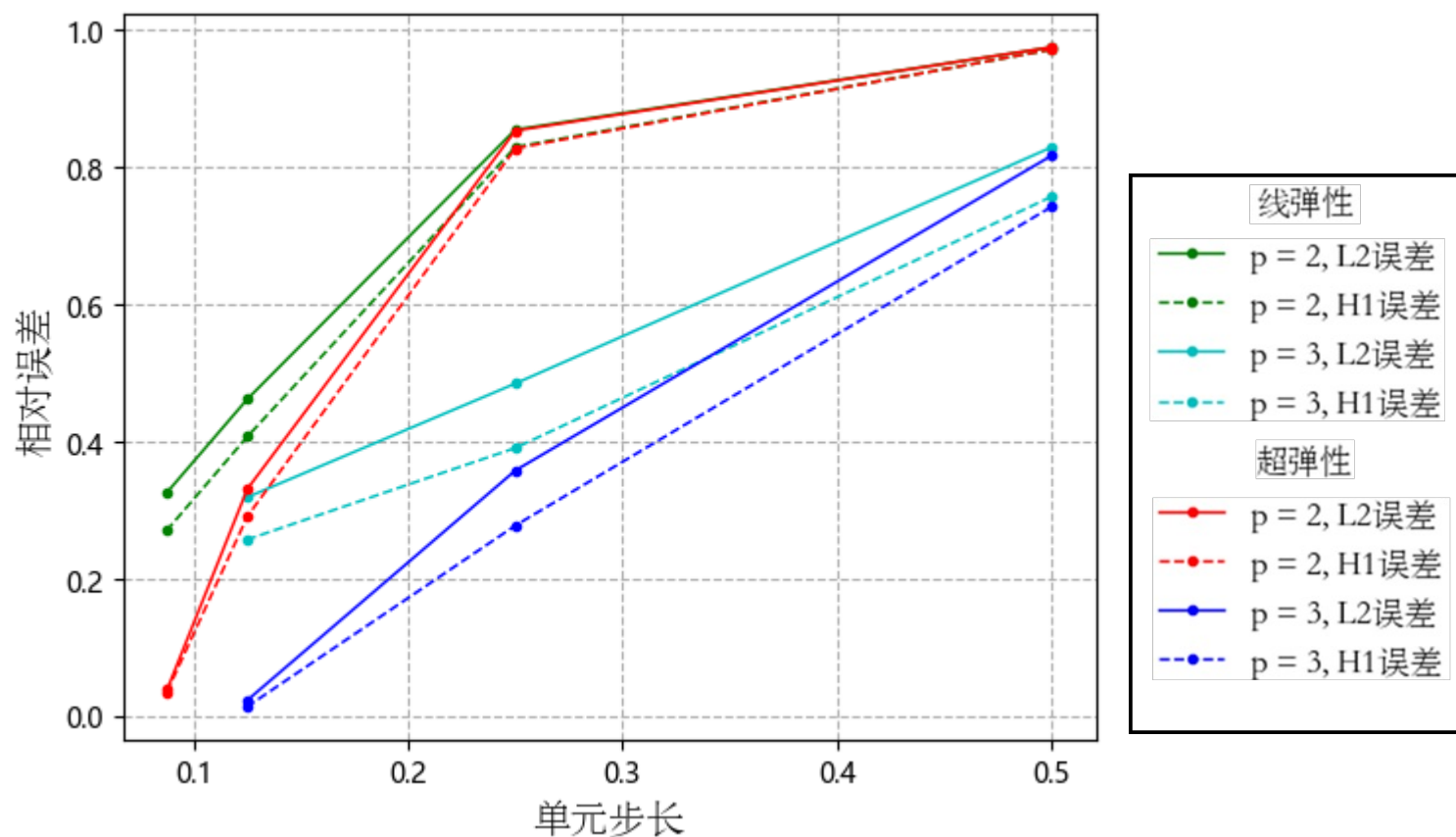
应力分布

模型阶数： $p=(4,4,3)$
 控制点数量： $n=(13,21,11)$
 单元数量：1620
 自由度：4950

2. 超弹性问题

以模型细分三次的仿真结果为精确解 u^* ，计算不同次数和单元密度下线弹性和超弹性下的数值误差

$$L2 = \frac{\|u^h - u^*\|_{L2(\Omega)}}{\|u^*\|_{L2(\Omega)}}, \quad H1 = \frac{\|u^h - u^*\|_{H1(\Omega)}}{\|u^*\|_{H1(\Omega)}}$$



相同的单元步长下超弹性模型精度高于线弹性模型，且随着单元密度增加，超弹性模型误差收敛的更快

厚壁圆柱线弹性和超弹性大变形仿真中L2和H1范数相对误差的收敛性

运动方程求解：

在处理模型运动变形过程时，必须考虑状态变量和变形随时间的变化，根据牛顿定律，物体运动方程的一般形式可表示为如下：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}$$

其中， $\mathbf{M}$ 表示质量矩阵，与模型的体积密度相关； $\mathbf{C}$ 是阻尼矩阵，与质量矩阵和模型刚度相关； $\mathbf{R}$ 是初始的载荷向量，与模型初始形变大小相关， $\mathbf{F}$ 为模型受到的外力大小。

$\ddot{\mathbf{u}}$ ， $\dot{\mathbf{u}}$ 分别表示位移的二阶导数和一阶导数，即加速度和速度。

令 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ ， $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{u}}$ ，当时间在 t_{n+1} 时运动方程转换为第 t_{n+1} 时刻的相关计算，即：

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{F}_{n+1}$$

初始条件定义为 $\mathbf{v}_0 = \bar{\mathbf{v}}$ ， $\mathbf{a}_0 = \bar{\mathbf{a}}$ ，求解上述是时间相关问题通常使用显示时间积分或隐式时间积分两种方式处理。

2. 超弹性问题

显式时间积分计算 t_{n+1} 处的物理量时仅需要第 t_n 时刻的物理量，因此该方法简单清晰。当方程中的质量矩阵具有对角结构的特性时，该方法能极大减少运算量。然而大多数情况下，显式时间积分收敛与否受步长限制，为保证收敛往往需要极小的步长，对帧率有很大的损失。

隐式时间积分计算 t_{n+1} 处的物理量时依赖前一个时刻 t_n 以及未知时刻 t_{n+a} 时的物理量。因此，每个时间步需要求解一个非线性方程，通常需要与前文的牛顿迭代法相结合。隐式方法优点在于系统无条件稳定，**不受时间步长限制**。超弹性仿真需要求解非线性方程组，且对**稳定性要求更高**，所以通常选择隐式时间积分法 Newmark 进行求解。

2. 超弹性问题

使用隐式时间积分法Newmark求解超弹性动力学问题。

其下一时刻的位移和速度的计算公式为：

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{(\Delta t)^2}{2} [(1 - 2\beta) \mathbf{a}_n + 2\beta \mathbf{a}_{n+1}] \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + \Delta t [(1 - \gamma) \mathbf{a}_n + \gamma \mathbf{a}_{n+1}]\end{aligned}$$

下一时刻的位移与速度由 t_n 时刻的位移、速度和下一时刻的加速度共同决定。 β 和 γ 是自定义参数，取值范围是 $\gamma \geq 0.5$ ， $\beta \geq (\gamma + 0.5)^2/4$ 。

2. 超弹性问题

使用隐式时间积分法Newmark求解超弹性动力学问题。

将上一页计算位移和速度的公式带入 $\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{F}_{n+1}$ 得到关于加速度的非线性方程组，使用牛顿迭代法求解方程组可以获得下一时刻的加速度值，在带入上一页公式得到下一刻的位移大小。整个运动仿真就是执行这一过程。由于一般最后使用位移作为最终结果，所以将位移推导为：

$$\mathbf{a}_{n+1} = \alpha_1(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \alpha_2\mathbf{v}_n - \alpha_3\mathbf{a}_n$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \alpha_4(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) + \alpha_5\mathbf{v}_n + \alpha_6\mathbf{a}_n$$

其中 $\alpha_1 \sim \alpha_6$ 是变换后的参数，为常数项，值分别为：

$$\alpha_1 = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\beta\Delta t}, \quad \alpha_3 = \frac{1 - 2\beta}{2\beta}$$
$$\alpha_4 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}, \quad \alpha_5 = \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right), \quad \alpha_6 = \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t$$

2. 超弹性问题

使用隐式时间积分法Newmark求解超弹性动力学问题。

由上述公式可得出下一个时间步的解由上一个时间步的解和位移变化量决定，未知量转化为 $\mathbf{u}_{n+1}$ ，通过将上一页的方程组带入物体运动方程 $\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{F}_{n+1}$ 中，得到关于位移的非线性代数方程：

$$\begin{aligned} G(\mathbf{u}_{n+1}) = & \mathbf{M}[\alpha_1(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \alpha_2\mathbf{v}_n - \alpha_3\mathbf{a}_n] \\ & + \mathbf{C}[\alpha_4(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) + \alpha_5\mathbf{v}_n + \alpha_6\mathbf{a}_n] \\ & + \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}) - \mathbf{F}_{n+1} = 0 \end{aligned}$$

该方程有T个时间步N个方程组成方程组，通过求解该方程组，得到每一个时间步的位移解。在每个时间步中使用牛顿迭代法求解该线性方程。

2. 超弹性问题

使用隐式时间积分法Newmark求解超弹性动力学问题。

由牛顿迭代法可知，位移的修正量表示为：

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1} = -\left(\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u}_{n+1}^i)}{\partial \mathbf{u}_{n+1}}\right)^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{u}_{n+1}^i)$$

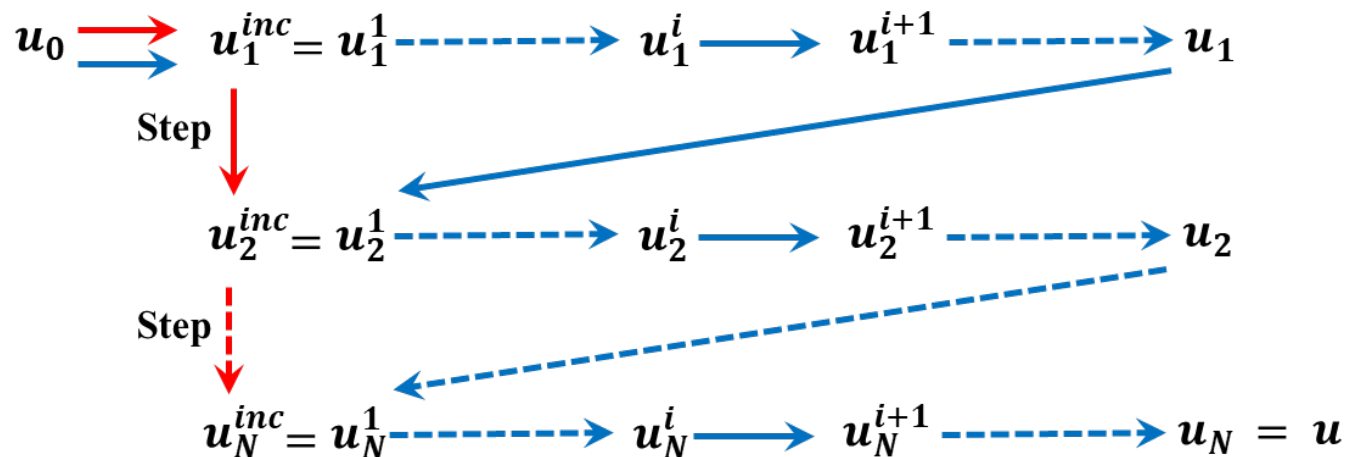
其中，上标*i*表示一个时间步内的第*i*次修正。函数 $\mathbf{G}(\mathbf{u}_{n+1})$ 中 $\mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}) - \mathbf{F}_{n+1}$ 等同于超弹性静态仿真中的残差值，即等同于 $\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{F}$ ，所以该项对位移的导数同于切线刚度矩阵 $\mathbf{K}_T$ 。因此每个时间步迭代过程等同于执行下式：

$$\begin{aligned} [\alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_4 \mathbf{C} + \mathbf{K}_T(\mathbf{u}_{n+1}^i)] \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} &= -\mathbf{G}(\mathbf{u}_{n+1}^i) \\ \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} &= \mathbf{u}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} \end{aligned}$$

其中，迭代的初始值是上次迭代的收敛值： $\mathbf{u}_{n+1}^0 = \mathbf{u}_n$ ，通过高斯积分计算各单元的质量矩阵，再根据控制点关系映射到整体的质量矩阵。

2. 超弹性问题

使用隐式时间积分法Newmark求解超弹性动力学问题。



横向为一个时间步中的牛顿迭代过程，竖向为隐式时间积分的时间步迭代。
其中，迭代的初始值是上次迭代的收敛值

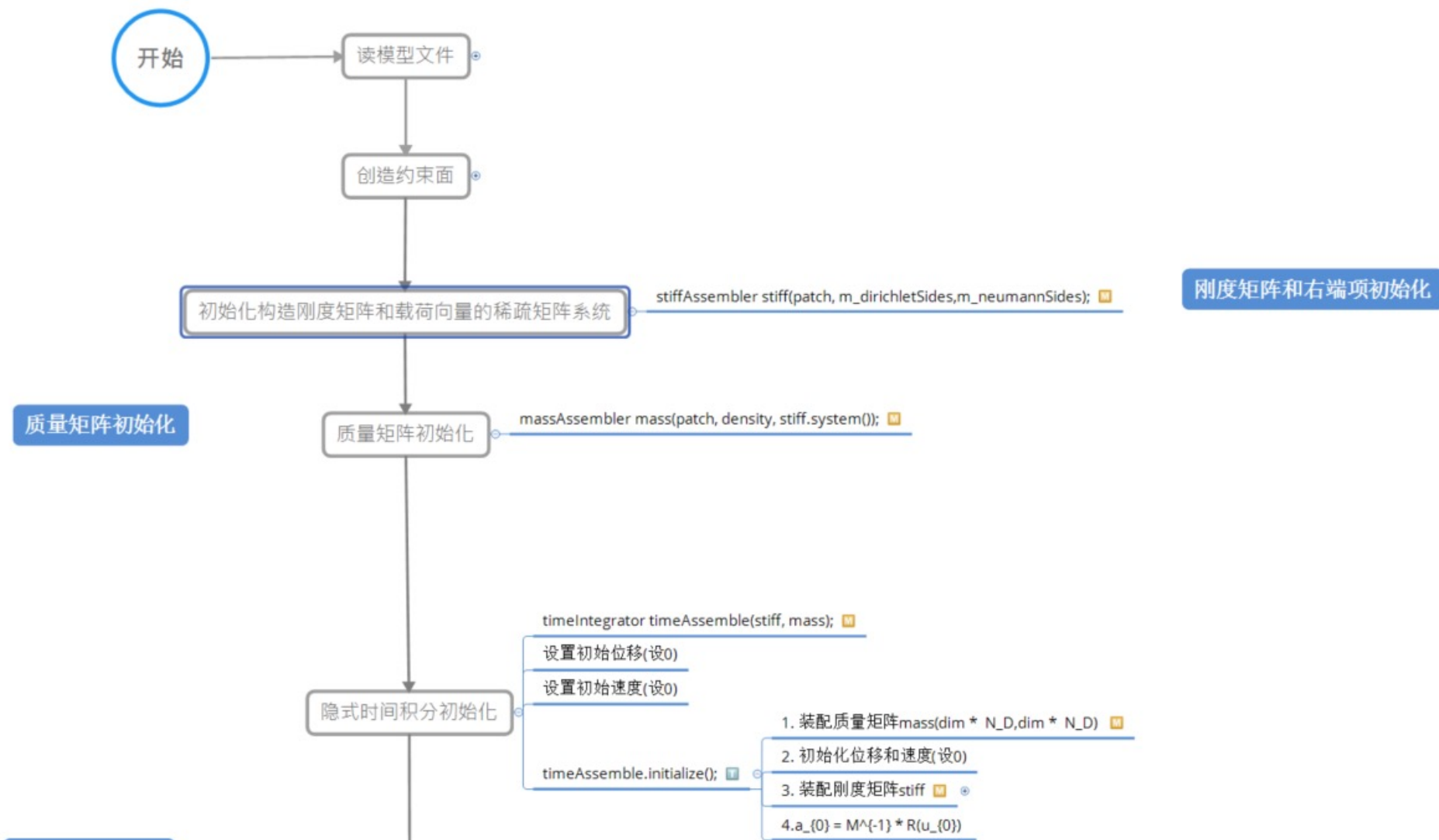
2. 超弹性问题

使用隐式时间积分法Newmark求解超弹性动力学问题。

- 1: 设定初始位移: $\mathbf{u}_{n+1}^0 = \mathbf{u}_n$
- 2: 设定收敛上限: $\varepsilon_u, \varepsilon_r > 0$
- 3: 初始化迭代次数: $i = 0$
- 4: while
- 5: 计算运动平衡方程梯度: $\mathbf{G}_T^i = \alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_4 \mathbf{C} + \mathbf{K}_T(\mathbf{u}_{n+1}^i)$
- 6: 计算运动方程残差: $\mathbf{r}^i = \mathbf{G}(\mathbf{u}_{n+1}^i)$
- 7: 求解位移增量: $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^i = \text{Solve } \mathbf{G}_T^i \Delta \mathbf{u}_{n+1}^i = -\mathbf{r}^i$
- 8: 计算误差
- 9: 更新位移量: $\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{u}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{i+1}$
- 10: 迭代次数加1: $i=i+1$
- 11: until 收敛
- 12: 返回节点位移量 $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n+1}^i$

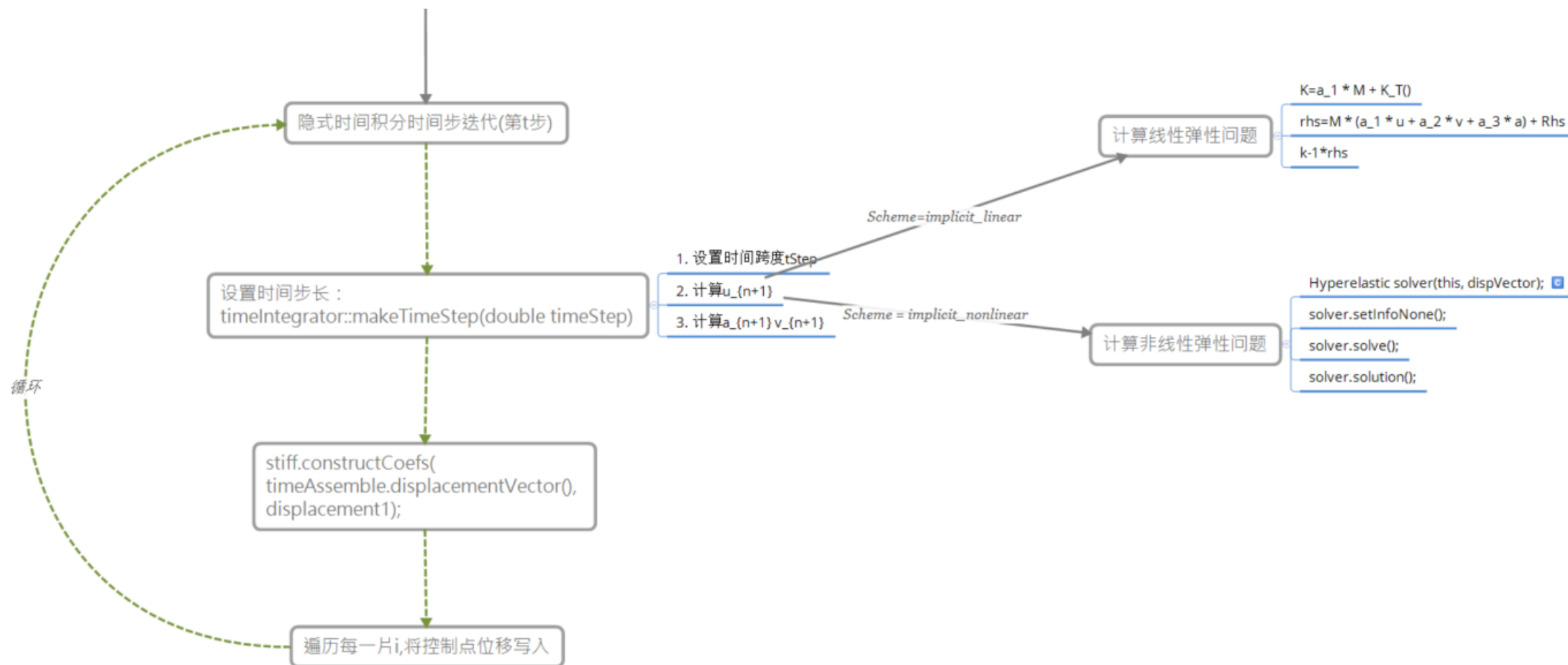
2. 超弹性问题

使用隐式时间积分法Newmark求解超弹性动力学问题。

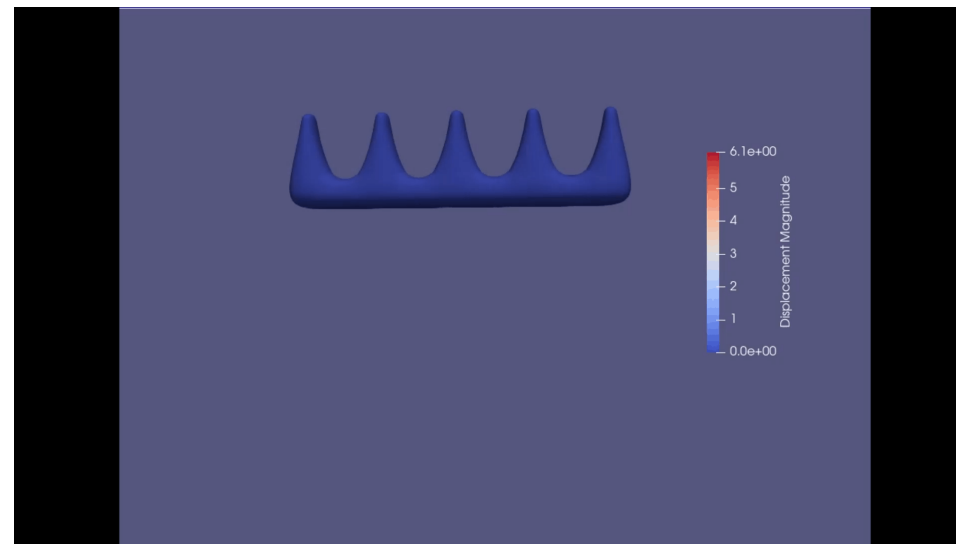
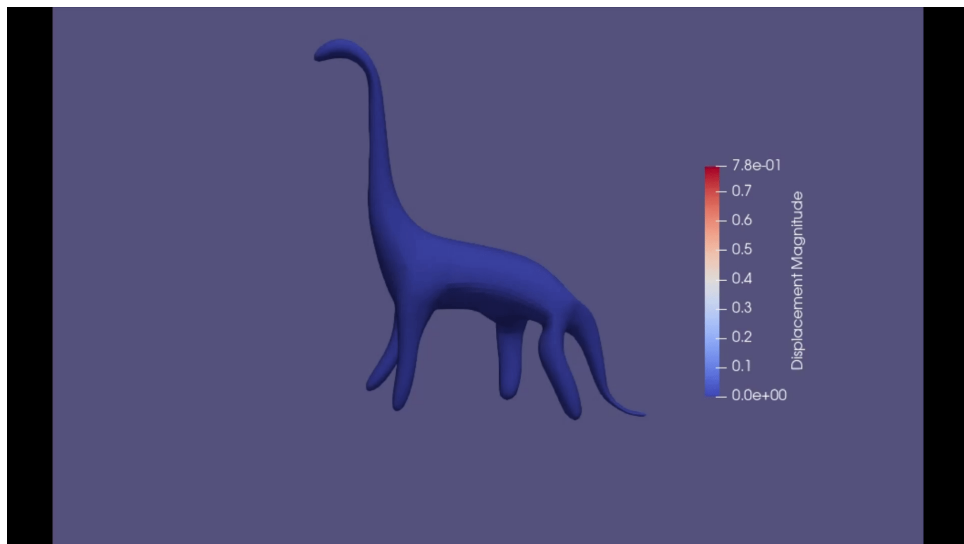
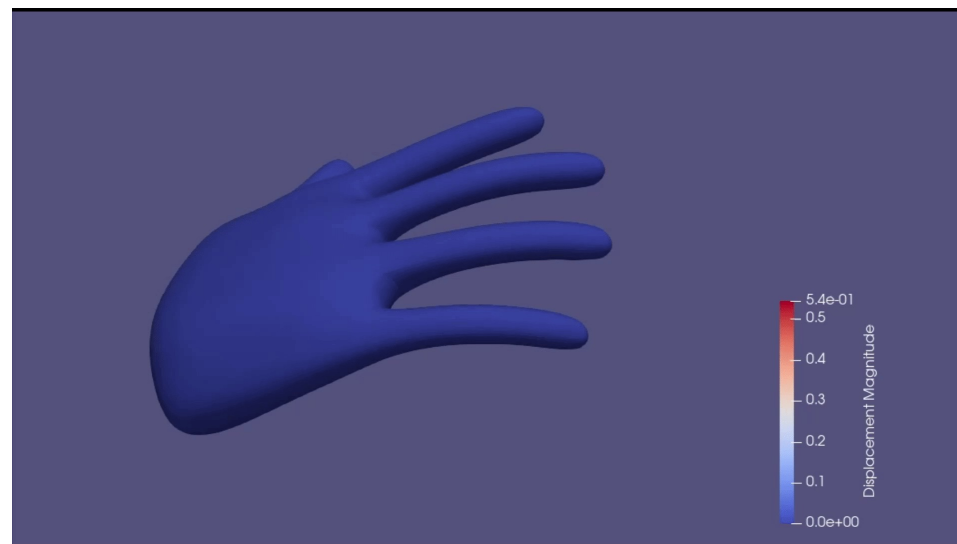
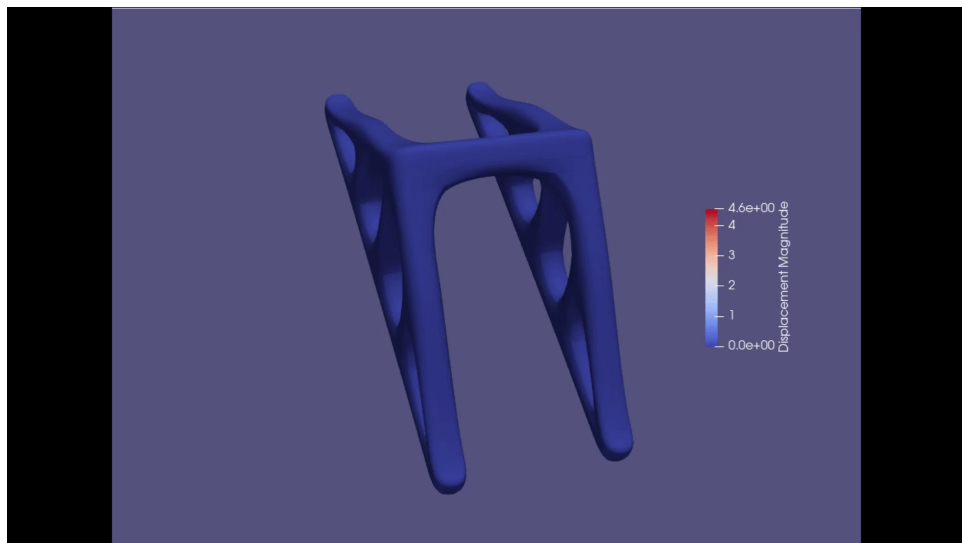


2. 超弹性问题

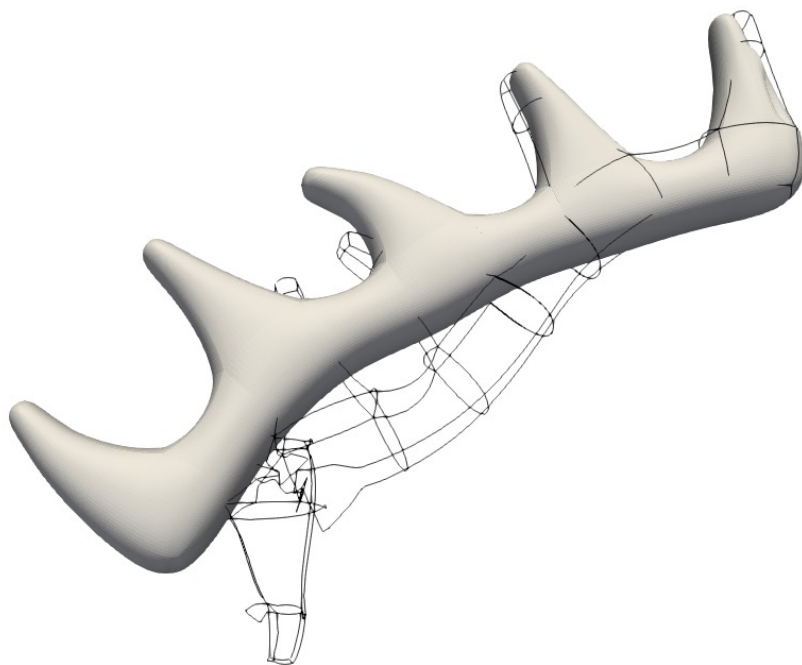
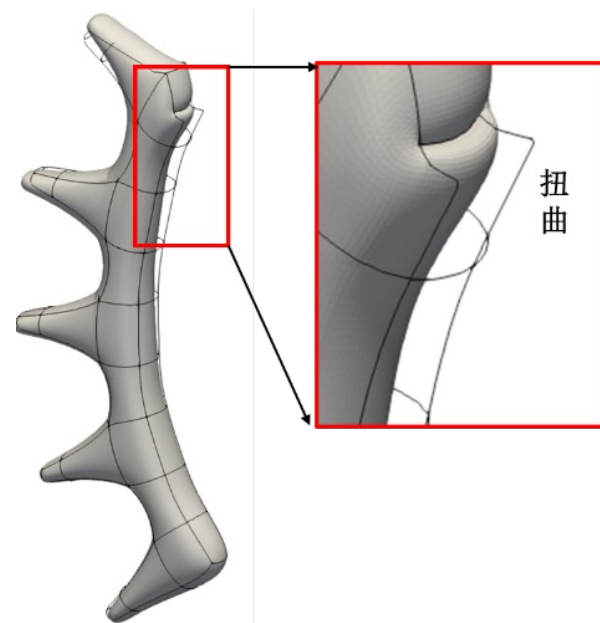
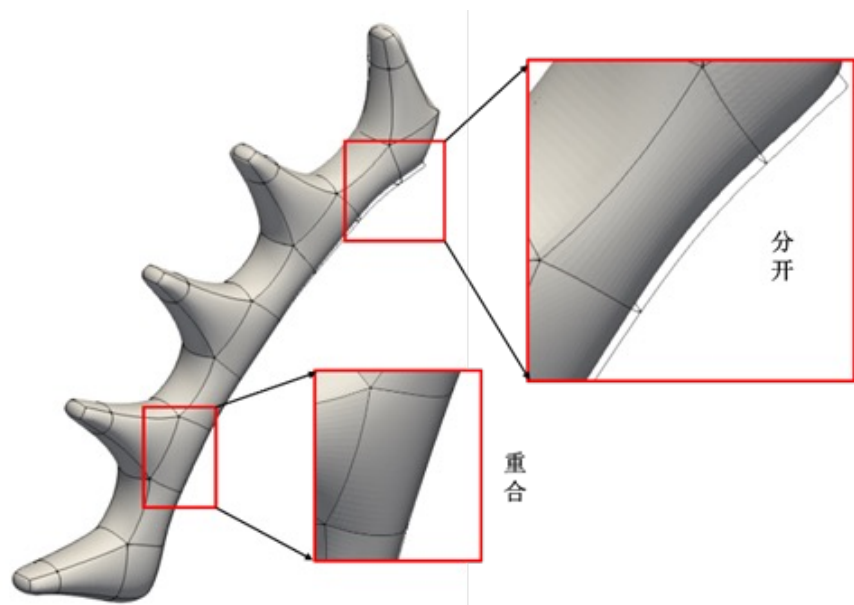
使用隐式时间积分法Newmark求解超弹性动力学问题。



2. 超弹性问题



2. 超弹性问题



- 有限元仿真大变形物体容易出现网格扭曲变形，需要多次重新划分网格
- 等几何仿真大变形物体在保证较高精度的同时也避免了频繁的划分，提高了仿真精度和速度

目 录

1. 超弹性问题求解

2. 等几何配点法

- 等几何分析中，等几何配点法相较于 **Galerkin** 方法能够有效的减少计算量。与 **Galerkin** 方法中使用方程的弱形式不同，配点法会先在计算域内选定一组点，在该点集内求解满足方程本身强形式的数值解
- 这通常会导致非对称方程组产生，并且使得边界赋值相对困难，但配点法能够避免 **Galerkin** 需要涉及到的区域内部数值积分问题，而这就是配点法能够极大地减少计算开销的原因
- 配点法本身与等几何分析也非常契合，因为配点法进行求解时采用的是偏微分方程的强形式，方程中将出现二阶导数，而等几何分析选用的基函数是样条基函数，这类基函数具有高阶连续性

4.2.1 配点的选择策略

在配点法中，通过在计算区域内的某个点集内（配点）满足偏微分方程本身，求解方程得到数值解，而非满足 Galerkin 方法中方程的弱形式，这将极大地提升计算效率。配点的选取是使用配点法不可或缺的重要步骤，接下来就如何在参数域内进行配点的选取展开讨论。

文献^[38]给出了两种配点方法分别是 Greville 坐标和 Demko 坐标，其中 Demko 坐标是 Chebyshev 样条的极值点，其坐标值可以通过迭代算法获得，可参考 Matlab 中的 chbpnt 函数以及文献^[56]。与之相比较 Greville 坐标方法被使用的更为广泛，给定一组节点向量 $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m\}$ 以及次数 p ，则 Greville 坐标 $\tilde{\xi}_i, i = 1, 2, \dots, n, n = m - p - 1$ ，其计算公式如下：

$$\tilde{\xi}_i = \frac{\xi_{i+1} + \xi_{i+2} + \dots + \xi_{i+p}}{p} \quad (4.1)$$

给定另一组节点向量 $\{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m\}$ ，类似地得到 Greville 坐标 $\tilde{\eta}_j, j = 1, 2, \dots, n$ 。则可以通过如下形式定义参数域内的配点 τ_{ij} ：

$$\tau_{ij} = (\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_j) \quad (4.2)$$

假设定义在二维平面域 Ω 的 PDE 问题如下:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (a \nabla u) + \vec{b} \cdot \nabla u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

其中 $a: \Omega \rightarrow R$ 和 $\vec{b} = (b_1, b_2)$, $b_i: \Omega \rightarrow R, i=1,2$ 。对于非齐次边界的情况,问题的解可以被分为两部分: $u = \hat{u} + u_g$, 其中, 在计算域边界 $\partial\Omega$ 上 $\hat{u} = 0$, $u_g = g$, 在计算域 Ω 内 $u_g = 0$ 。边界解 u_g 可以用边界上非零基函数进行近似, 而内部解 $\hat{u}$ 需要求解。因此, 本文只考虑具有齐次边界条件的方程。

假设二维区域由 B 样条曲面进行表示, 如下

$$G(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} N_i(\xi) N_j(\eta) =: \sum_{l=0}^L P_l N_l(\xi, \eta), (\xi, \eta) \in [0, 1] \times [0, 1] \quad (4.4)$$

其中 B 样条基函数产生于节点向量 $S = \{\xi_0, \xi_0, \dots, \xi_{n+p}\}$ 和 $T = \{\eta_0, \eta_0, \dots, \eta_{m+q}\}$, 其中 p 是 S 方向上的阶数, q 是 T 方向上的阶数。

选用合适的配点选择策略对参数域进行配点, 然后将配点 τ_{ij} 代入公式(4.3), 如下:

$$\left[\nabla \cdot (a \nabla u) + \vec{b} \cdot \nabla u \right] (\tau_{ij}) = f \quad (4.5)$$

在等几何分析中，用来近似方程 (4.3) 的数值解的基函数与表示几何的基函数是同一组基函数。虽然用于几何表示的基函数是定义在参数域上的，但是几何映射和定义在参数域上的基函数的组合可以产生定义在计算域 Ω 上的基函数，该基函数表示形式如下：

$$\hat{N}_{ij}(x, y) = N_{ij}(G^{-1}(x, y)), i = 0, \dots, n; j = 0, \dots, m.$$

则在空间 $V^h = \left\{ \hat{N}_{ij} \mid \hat{N}_{ij}|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$ 中数值解的近似形式如下：

$$u^h = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} u_{ij}^h \hat{N}_{ij}(x, y) =: \sum_{l=0}^{\hat{L}} u_l^h \hat{N}_l(x, y) \quad (4.6)$$

将公式 (4.6) 代入公式 (4.5)，得到一个线性方程组

$$KU = F \quad (4.7)$$

其中 K 是总刚度矩阵， F 是右端项， U 是待求解的系数。在一般情况下，参数化由多个样条面片组成，因此配点将被分成三个类别，分别是位于样条面片内部的配点、面片与面片之间的公共配点以及位于边界上的配点。接下来以配点 τ_{ijk} 和本文将求解的泊松方程为例，介绍如何对上述的线性系统进行装配。其中配点

的配点、面片与面片之间的公共配点以及位于边界上的配点。接下来以配点 τ_{ijk} 和本文将求解的泊松方程为例，介绍如何对上述的线性系统进行装配。其中配点 τ_{ijk} 下标 k ，表示该配点属于第 k 个面片。以表格的形式给出线性系统中各类配点的装配公式，其中 Ω_k 为第 k 个面片的内部区域， $\partial\Omega_k$ 为第 k 个面片的边界， Γ_D 为整个区域的边界， d 为方程的边界条件， κ 为内部边界重合点的集合，则 n'_k 和 n''_k 分别是相邻两个面片公共边界上相应配点处的外法向。配点处的装配公式表格如下所示：

表 4.1 配点处的装配公式

位置	装配公式
$T_{i,j,k} \in \Omega_k$	$\Delta u^h_{(T_{i,j,k})} = f(T_{i,j,k})$
$T_{i,j,k} \in \partial\Omega_k, T_{i,j,k} \notin \Gamma_D$	$\sum_{k \in \kappa} \left[(\Delta u^h \cdot n'_k)_{(T_{i,j,k})} + (\Delta u^h \cdot n''_k)_{(T_{i,j,k})} \right] = 0$
$T_{i,j,k} \in \Gamma_D$	$u_h(T_{i,j,k}) = d(T_{i,j,k})$

4.2.3 等几何配点法分析算例

为了更好的说明本文引入配点法的必要性，本小节将给出若干分别基于配点法与 Galerkin 方法的实验算例。实验描述：在同一参数域上求解具有精确解 x^2+y^2 的泊松方程，得到对应的计算时间，其计算方法分别基于配点法和 Galerkin 方法。实验中将对同一模型通过 h-加细，提升模型的自由度。

表 4.2 Galerkin 与配点法的计算时间

自由度	计算时间		计算时间之比
	Galerkin	配点	Galerkin/配点
1397	2.927	0.567	5.16
3707	10.368	1.474	7.03
11657	46.459	5.73	8.11

从表 4.2 中的实验结果可以明显看出，随着自由度的增大，Galerkin 与配点法所用的时间之比呈增大的趋势。因此，在本文引入配点法来降低计算开销是非常必要的。

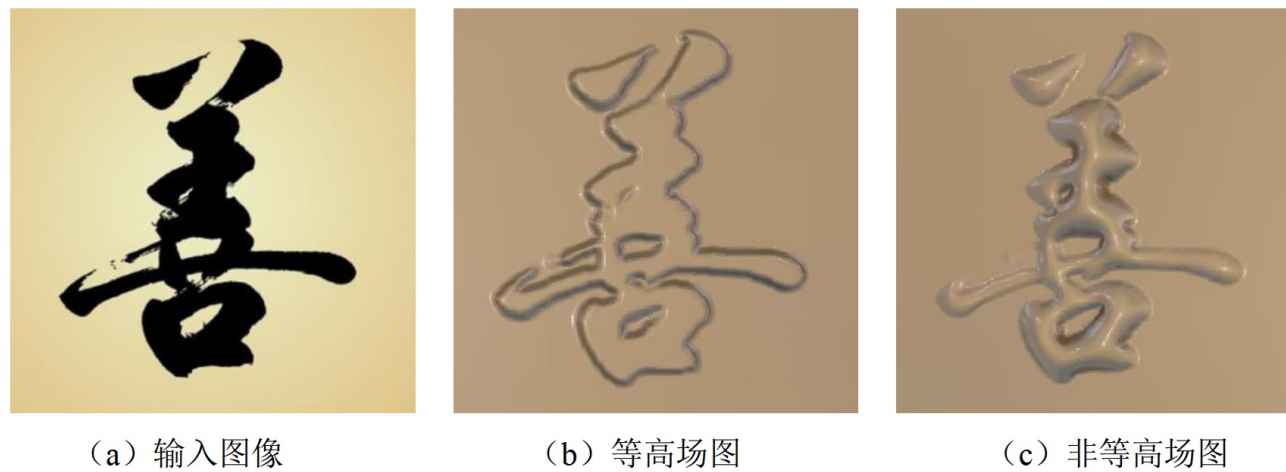


图 4.2 书法“善”等高场与非等高场静态浮雕示例

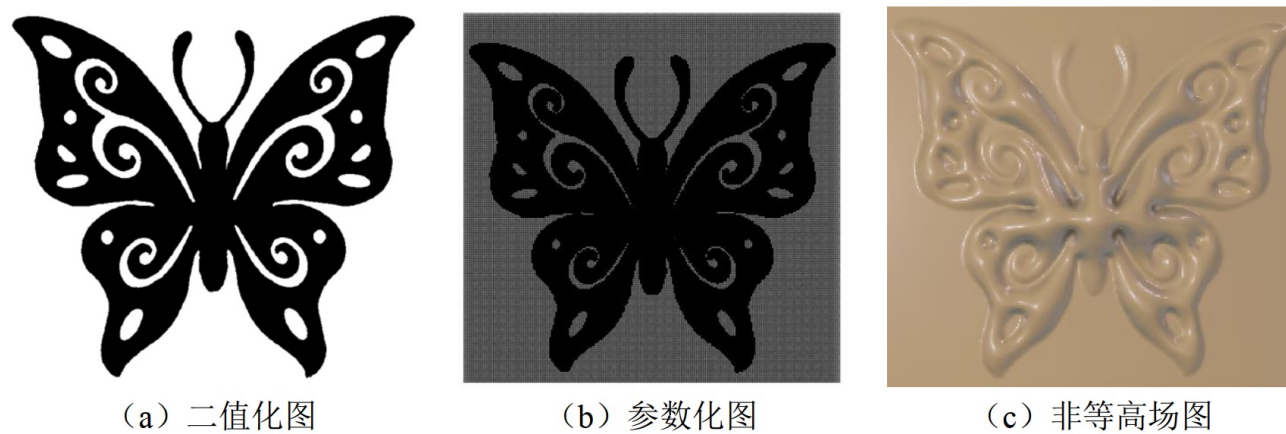


图 4.3 静态浮雕模型生成流程图

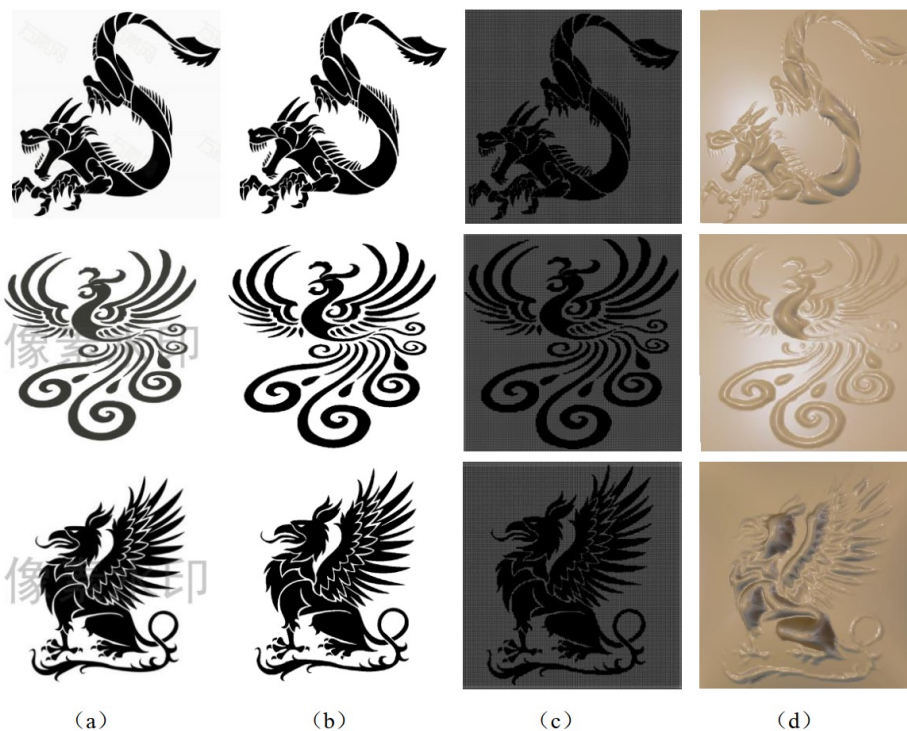


图 4.8 浅浮雕细节图 ((a) 原图; (b) 二值化图; (c) 参数化图; (d) 浮雕细节面)

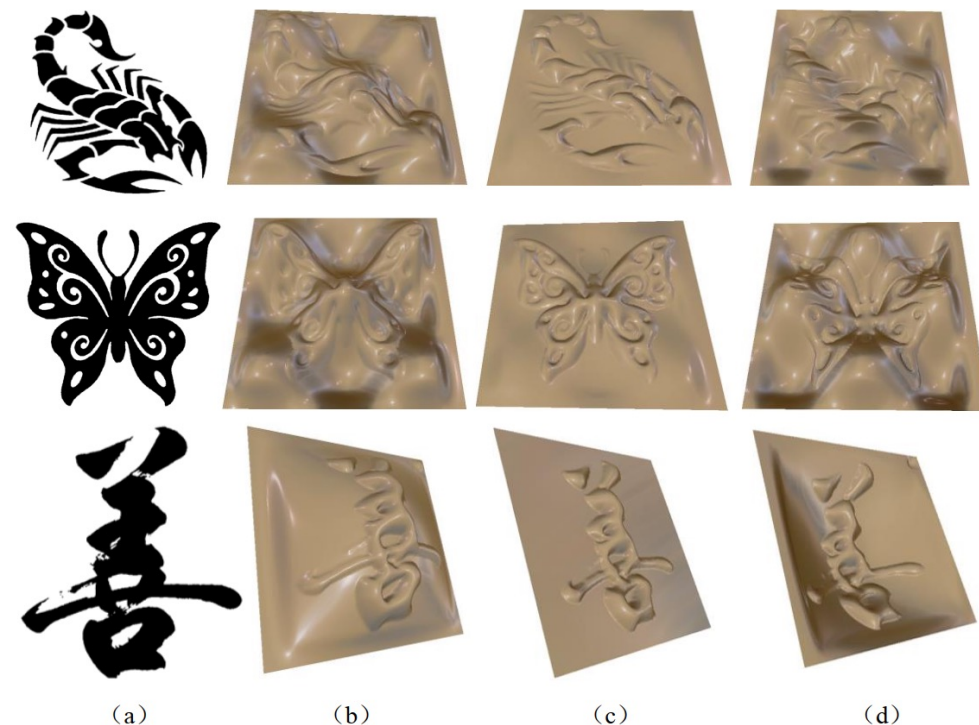


图 4.10 动态浅浮雕图 ((a) 二值化图; 图 (b) (c) (d) 不同时刻浅浮雕图)

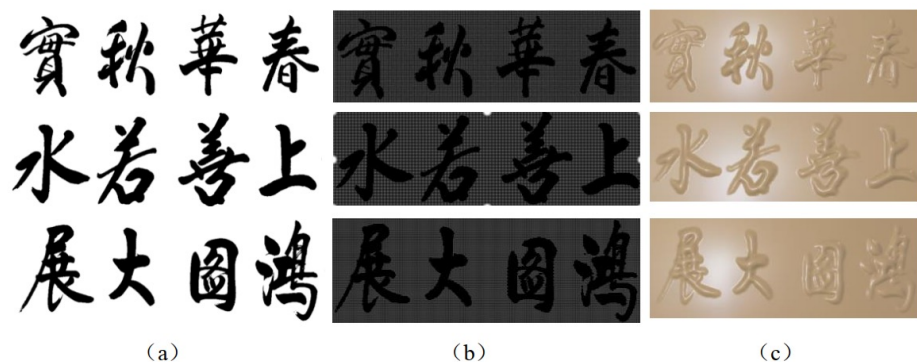


图 4.9 浅浮雕细节图 ((a) 二值化图; (b) 参数化图; 图(c)浮雕细节面)



图 4.11 更多动态浅浮雕图 ((a) 二值化图; 图 (b) (c) (d) 不同时刻浅浮雕图)



智能可视建模与仿真实验室

Intelligent Visual Modeling & Simulation (iGame) Lab

Thank You!

Q & A