智能可视建模与仿真实验室

Intelligent Visual Modeling & Simulation (iGame) Lab

第三讲 有限元分析与网格生成

徐 岗

杭州电子科技大学计算机学院

浙江省离散行业工业互联网重点实验室

Email：gxu@hdu.edu.cn

目 录

1. 有限元分析

1. 物理仿真边值问题的一般描述
2. 有限元法基本思想
3. 有限元法的基本步骤与相关概念
4. 有限元法的形成与发展

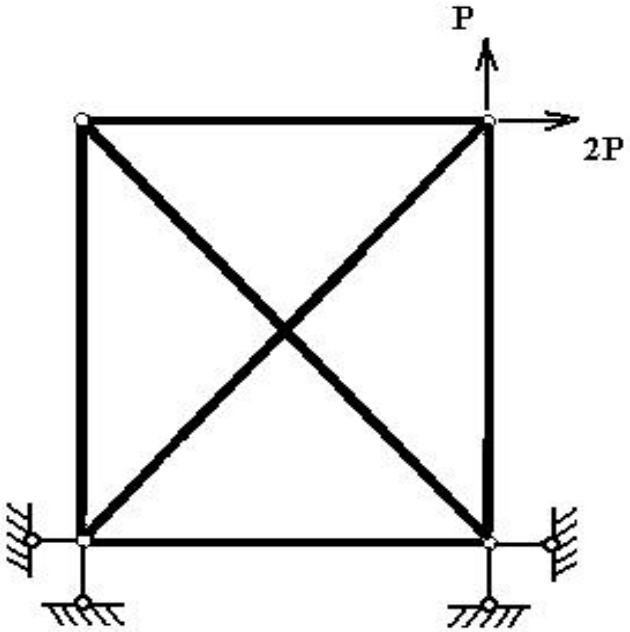
2. 网格生成

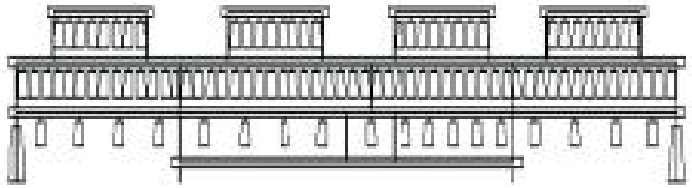
1. 非结构化网格
2. 结构化网格

一、工程和科学中典型问题

在工程技术领域内，经常会遇到两类典型的问题。第一类问题，可以归结为有限个已知单元体的组合。例如，材料力学中的连续梁、建筑结构框架和桁架结构。把这类问题称为离散系统。

如右图1所示平面桁架结构，是由6个承受轴向力的“杆单元”组成。尽管离散系统是可解的，但是求解右图2这类复杂的离散系统，要依靠计算机技术。

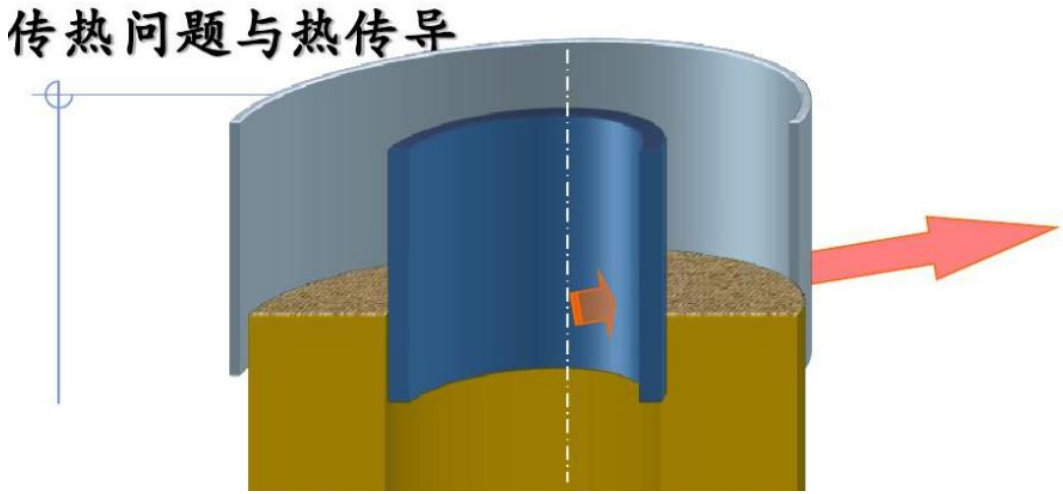




工程和科学中典型问题

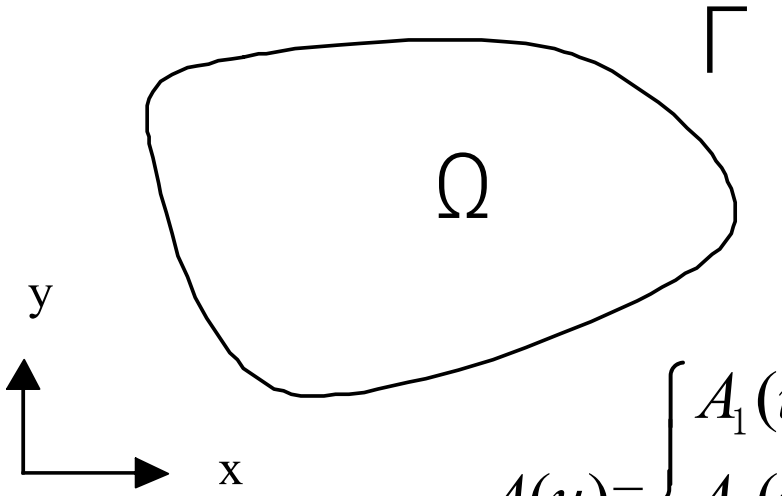
第二类问题，通常可以建立它们应遵循的基本方程，即微分方程和相应的边界条件。例如弹性力学问题，热传导问题，电磁场问题等。由于建立基本方程所研究的对象通常是无限小的单元，这类问题称为连续系统，或场问题。

尽管已经建立了连续系统的基本方程，由于边界条件的限制，通常只能得到少数简单问题的精确解答。对于许多实际的工程问题，还无法给出精确的解答。



二、场问题的一般描述——微分方程+边界条件

1）应力场----弹性力学
2）温度场----热传导
3）电磁场----电磁学
4）流速场----流体力学



$$A(u)=\begin{Bmatrix} A_1(u) \\ A_2(u) \\ \cdots \end{Bmatrix}=0 \qquad \text{在 } \Omega \text{ 内}$$

A、B----微分算子（如对坐标或时间的微分）

u----未知场函数，可为标量场（如温度），也可为矢量场（如位移、应变、应力等）

$$B(u)=\begin{Bmatrix} B_1(u) \\ B_2(u) \\ \cdots \end{Bmatrix}=0 \qquad \text{在 } \Gamma \text{ 上}$$

数值计算方法分类

	特 点	优缺点
差分法	离散求解域；差分代替微分；解代数方程组	要求规则边界，几何形状复杂时精度低
等效积分法（加权余量法或泛函变分法）	整体场函数用近似函数代替；微分方程及定解条件的等效积分转化为某个泛函的变分，--求极值问题	适合简单问题，复杂问题很难解决
有限元法	离散求解域；分片连续函数近似整体未知场函数；解线性方程组	节点可任意配置，边界适应性好；适应任意支撑条件和载荷；计算精度与网格疏密和单元形态有关，精度可控

三、有限元法基本思想

有限元分析的力学基础是弹性力学，而方程求解的原理是采用加权残值法或泛函极值原理，实现的方法是数值离散技术，最后的技术载体是有限元分析软件（CAE软件）。

有限元法是一种基于变分法(或变分里兹法)而发展起来的求解微分方程的数值计算方法, 该方法以计算机为手段, 采用分片近似, 进而逼近整体的研究思想求解物理问题。简而言之, 其基本思想就是里兹法加分片近似, 可归纳如下：

(1) 首先, 将物体或求解域离散为有限个互不重叠仅通过节点相互连接的子域(即单元), 原始边界条件也被转化为节点上的边界条件, 此过程常称为离散化。

《有限元分析及应用》，胡于进、王璋奇，北京：清华大学出版社, 2009　P9-P10

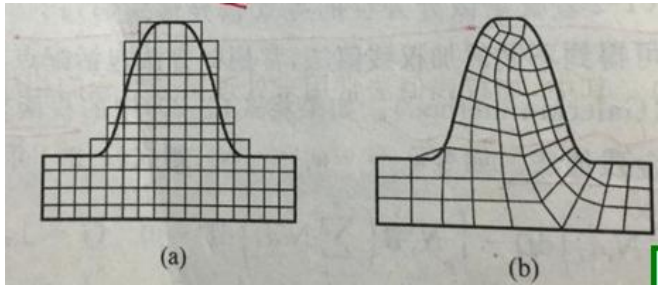
2. 有限元法基本思想

（2）在单元内，选择简单近似函数来分片逼近未知的求解函数，即分片近似。具体做法是在单元上选择一些合适的节点作为求解函数的插值点，将微分方程中的变量改写成由各变量或其导数的节点值与所选用的插值函数组成的线性表达式，这是有限元法的创意和精华所在。而整体区域上的解函数就是这些单元上的简单近似函数的组合；

（3）基于与原问题数学模型（基本方程和边界条件）等效的变分原理或加权残值法，建立有限元方程（即刚度方程），从而将微分方程转化为一组以变量或其导数的节点值为未知量的代数方程组。进而借助矩阵表示和计算机求解代数方程组得到原问题的近似解。

2. 有限元法基本思想

- 在整个有限元分析过程中离散化是分析的基础。它借鉴了差分法的离散思想，并进行了适当的改进。
- 差分法是对求解域进行规则划分，不适用于复杂求解域；
- 有限元法的离散对单元形状和大小没有规则划分的限制，单元可以为不同形状，且不同单元可以相互连接合，所以，有限元法可以模型化任何复杂几何形状的物体或求解区域，离散精度高。
- 如下图所示，对齿轮轮齿模型采用差分法的均匀网格离散，则离散后的边界形状与原始边界产生很大误差；而有限元法可采用变密度的网格，很好地逼近了原始的轮廓形状，齿根部位的应力集中也可通过网格加密来提高计算精度。



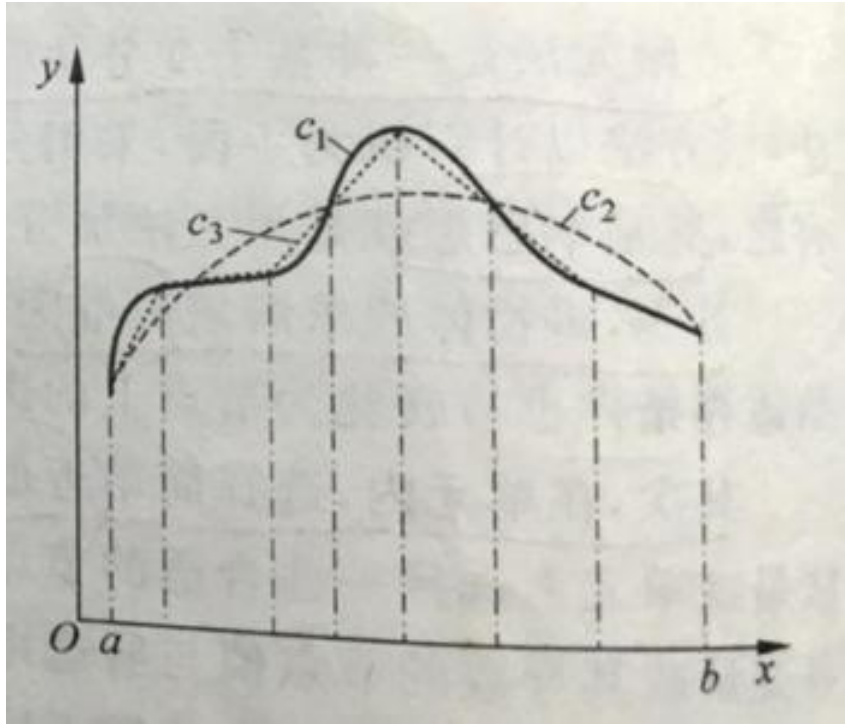
2. 有限元法基本思想

- 分片近似是有限元法的核心，也是与里兹法和伽辽金残值法的重要区别。
- 里兹法和辽金残值法都是在整个求解域上构造一个试探函数(或近似函数)来逼近真实解，当试探数与真实解的函数形态在求解域内趋于一致时，则这种处理是合理的。
- 若真实解的函数形态很复杂，则用一个近似函数逼近真实解难以达到较高精度，或由于不能在求解域的不同区域对试探函数提出不同的精度要求，造成局部精度的要求高使问题难于求解。
- 里兹法一般只适用于求解函数和边界条件较简单的问题。
- 有限元法是应用局部的近似解来建立整个求解域的解的一种方法，针对一个单元来选择近似函数，积分计算也是在单元内完成
- 由于单元形状简单，一般采用低阶多项式函数就能较好地逼近真实函数在该单元上的解，此过程可认为是里兹法的一种局部化应用。

2. 有限元法基本思想

而整个求解域内的解可以看作是所有单元近似解的组合。对于整个求解域，只要单元上的近似函数满足收敛性要求,随着单元尺寸的不断缩小,有限元法提供的近似解将收敛于问题的精确解。

分片近似的思想可用下图所示的一维问题示意表达,图中[a,b]为求解域。假设求解域上的真实函数分布为曲线c1,c2为定义在[a,b]整个区域上用于逼近真实函数c1的试探函数，显然，若要取得真实函数较高精度的逼近，试探函数c2必须具有较高的函数阶次。



2. 有限元法基本思想

- 若将求解域[a, b] 离散为若干个小区间(即有限元的一维单元),而在每个小区间上用一个简单的试探函数(如直线)就可很好地近似在该区间的真实函数,这些简单试探函数的集合就近似代表了整个区间上的真实函数
- 随着区间离散数目越多,折线就越逼近真实函数,计算精度也就越高
- 矩阵表示和计算机求解是有限元法的关键。因为有限元方程是以节点值和其导数值为未知变量的,节点数目多,形成的线性方程组维数很高,一般工程问题都有成千上万,复杂问题可达百万或更多。所以,有限元方程必须借助矩阵进行表示,只有利用计算机才能求解。

2. 有限元法基本思想

所以说，有限元法是吸取了差分法对求解域进行离散处理的启示，又继承了里兹法选择试探函数近似逼近的思想而发展起来的。从本质上看，它和里兹法是等效的，它属于里兹法的范畴，其基本方程的计算格式可基于变分原理导出。

实际上，有限元方程的建立有多种不同的方法，常见三种方法：直接刚度法、变分法和加权残值法（伽辽金法）。其中，加权残值法常用来处理微分方程的相应泛函不存在的情况，如瞬态热传导问题、电磁场问题等非固体力学问题，从而也大大扩展了有限元法的应用领域。

《有限元分析及应用》，胡于进、王璋奇，北京：清华大学出版社，2009　P9-P10

2. 有限元法基本思想

有限元法基本思想：

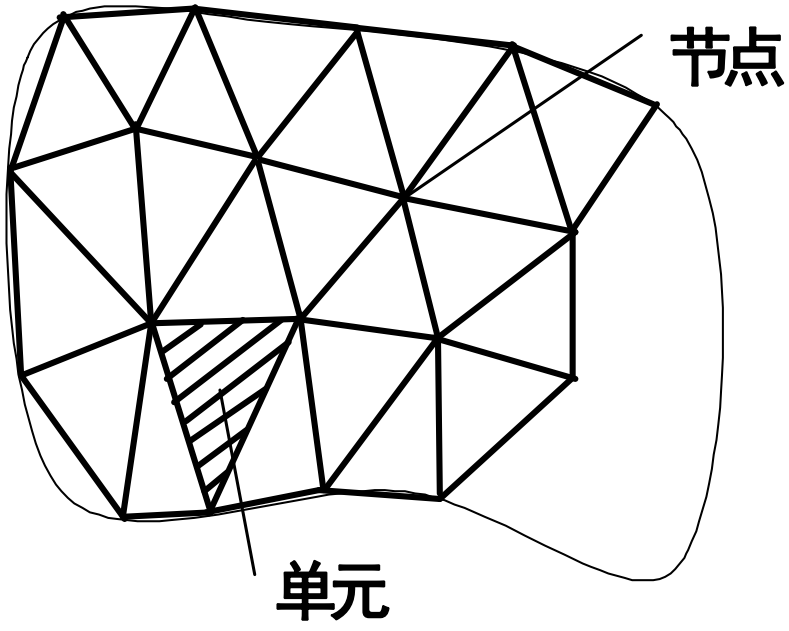
◆ 先将求解域离散为有限个单元，单元与单元只在节点相互连接；----即原始连续求解域用有限个单元的集合近似代替

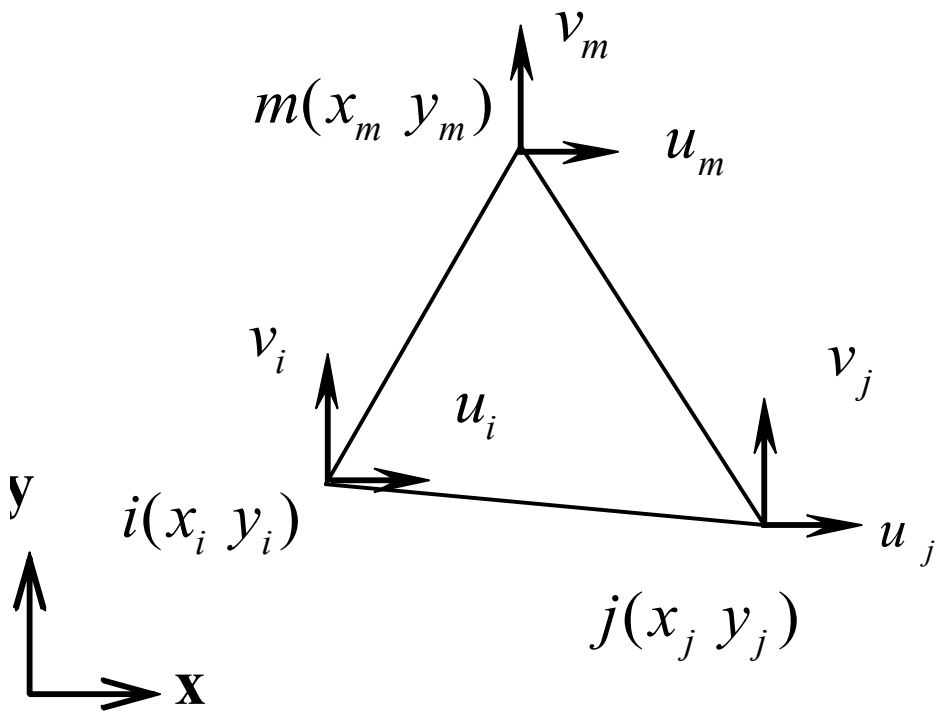
◆ 对每个单元选择一个简单的场函数近似表示真实场函数在其上的分布规律，该简单函数可由单元节点上物理量来表示----通常称为插值函数或位移函数

◆ 基于问题的基本方程，建立单元节点的平衡方程（即单元刚度方程）

◆ 借助于矩阵表示，把所有单元的刚度方程组合成整体的刚度方程，这是一组以节点物理量为未知量的线性方程组，引入边界条件求解该方程组即可。

2. 有限元法基本思想





实例1（离散系统）

（1）结构离散：

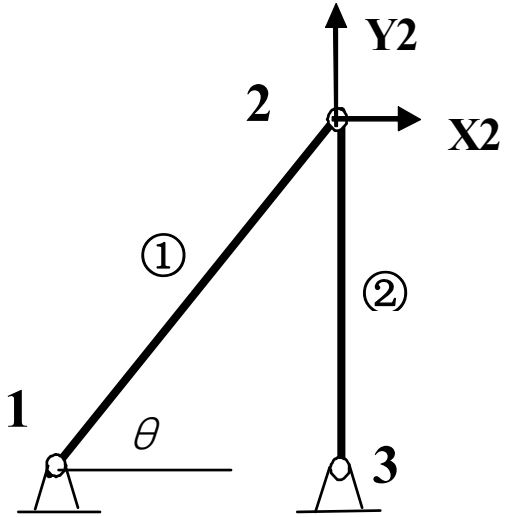
首先分析单元1

节点位移向量表示：

$$\{\delta^1\} = [u_1^1, v_1^1, u_2^1, v_2^1]^T$$

节点力向量表示：

$$\{F^1\} = [F_{x1}^1, F_{y1}^1, F_{x2}^1, F_{y2}^1]^T$$

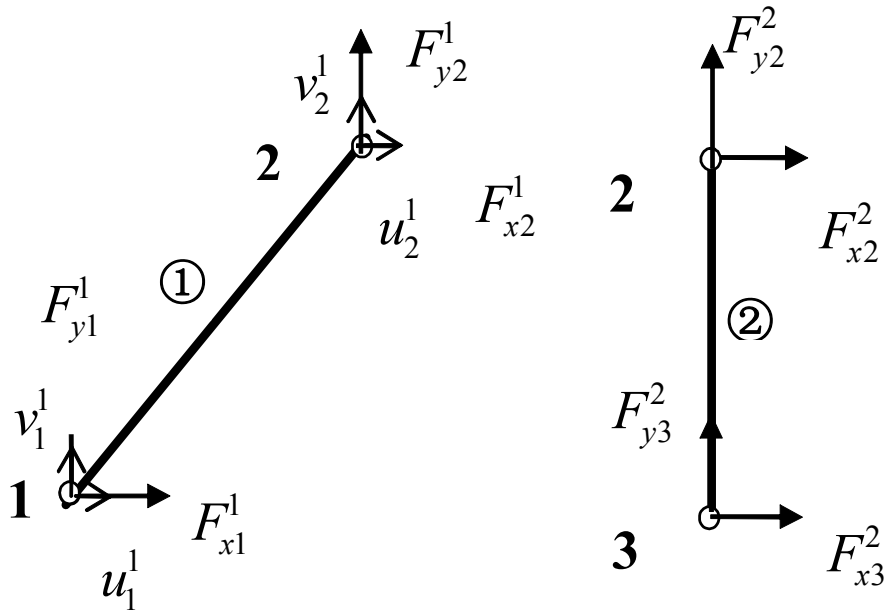


节点1沿x方向的位移 $u_1^1 = 1$、其余节点位移全为0时轴向压力为：

$$F_1^1 = A\sigma$$

$$= AE\varepsilon = EA(\frac{\Delta l_1}{l_1})$$

$$= \frac{EA\cos\theta}{l_1}$$



A是杆的横截面面积，E是材料矩阵，sigma是该节点的应力

实例1（离散系统）

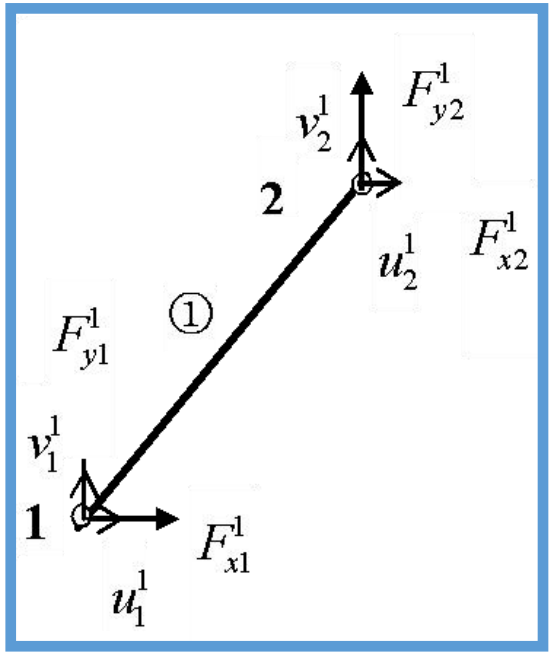
（2）单元分析：

- **节点1作用于单元1上的力，在x和y方向的分量分别为：**

$$F_{y1}^{1}=k_{21}^{1}=F_{1}^{1}\sin\theta=\frac{EA}{l_1}\cos\theta\sin\theta \qquad F_{x1}^{1}=k_{11}^{1}=F_{1}^{1}\cos\theta=\frac{EA}{l_1}\cos^2\theta$$

同理，节点2作用于单元1上的力，其大小与之相等，方向相反，x和y方向的分量分别记为：

$$F_{x2}^{1}=k_{31}^{1}=-\frac{EA}{l_1}\cos^2\theta, \qquad F_{y2}^{1}=k_{41}^{1}=-\frac{EA}{l_1}\cos\theta\sin\theta$$



注：k_{ij}^{e} 表示第e个单元的第j个自由度产生单位位移，而其它自由度上的位移为零时，第i个自由度上所受的力。常称其为单元的刚度系数。

实例1（离散系统）

（2）单元分析：

节点1沿x方向的位移$u_1^1=1$、其余节点位移全为0时，单元1上在x和y方向的节点力分量分别为：

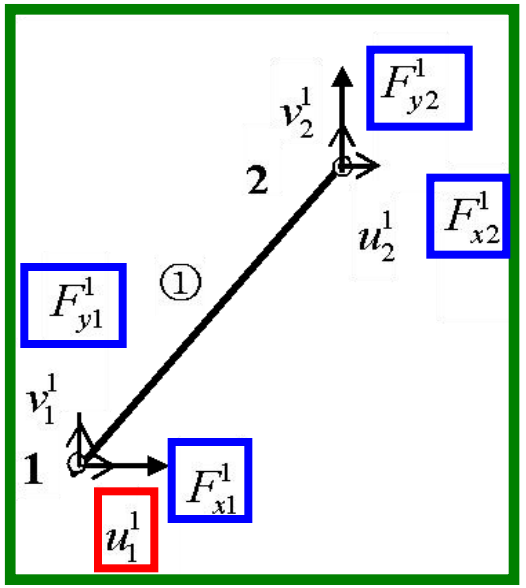
$$F_{x1}^1=k_{11}^1=\frac{EA}{l_1}\cos^2\theta$$

$$F_{y1}^1=k_{21}^1=\frac{EA}{l_1}\cos\theta\sin\theta$$

$$F_{x2}^1=k_{31}^1=-\frac{EA}{l_1}\cos^2\theta$$

$$F_{y2}^1=k_{41}^1=-\frac{EA}{l_1}\cos\theta\sin\theta$$

$$\begin{Bmatrix}F_{x1}^1\\F_{y1}^1\\F_{x2}^1\\F_{y2}^1\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{11}^1&k_{12}^1&k_{13}^1&k_{14}^1\\k_{21}^1&k_{22}^1&k_{23}^1&k_{24}^1\\k_{31}^1&k_{32}^1&k_{33}^1&k_{34}^1\\k_{41}^1&k_{42}^1&k_{43}^1&k_{44}^1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^1\\v_1^1\\u_2^1\\v_2^1\end{Bmatrix}$$



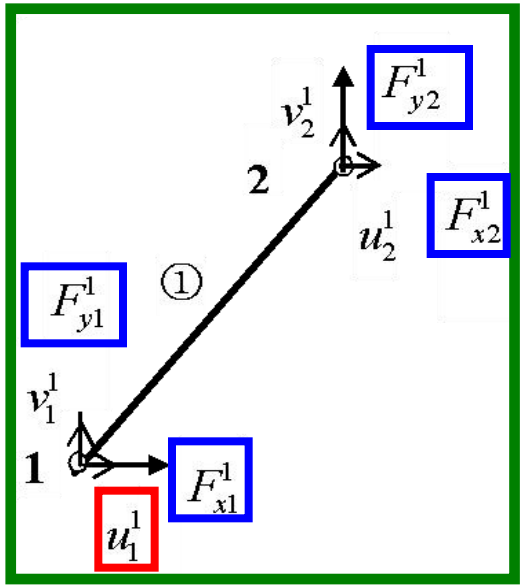
注：k_{ij}^e 表示第e个单元的第j个自由度产生单位位移，而其它自由度上的位移为零时，第i个自由度上所受的力。常称其为单元的刚度系数。

实例1（离散系统）

（2）单元分析：

同理可求 u_2^1、v_1^1、v_2^1 分别作单位位移时相应的刚度系数，考虑到节点的实际受力为 $F_{x1}^1, F_{y1}^1, F_{x2}^1, F_{y2}^1$ 和实际位移为 $u_1^1, v_1^1, u_2^1, v_2^1$，则据各个节点节点力平衡得：

$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^1 \\ F_{y1}^1 \\ F_{x2}^1 \\ F_{y2}^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ v_1^1 \\ u_2^1 \\ v_2^1 \end{Bmatrix}$$



- 单元①节点力平衡方程

$$F_{x1}^1 = k_{11}^1 u_1^1 + k_{12}^1 v_1^1 + k_{13}^1 u_2^1 + k_{14}^1 v_2^1$$

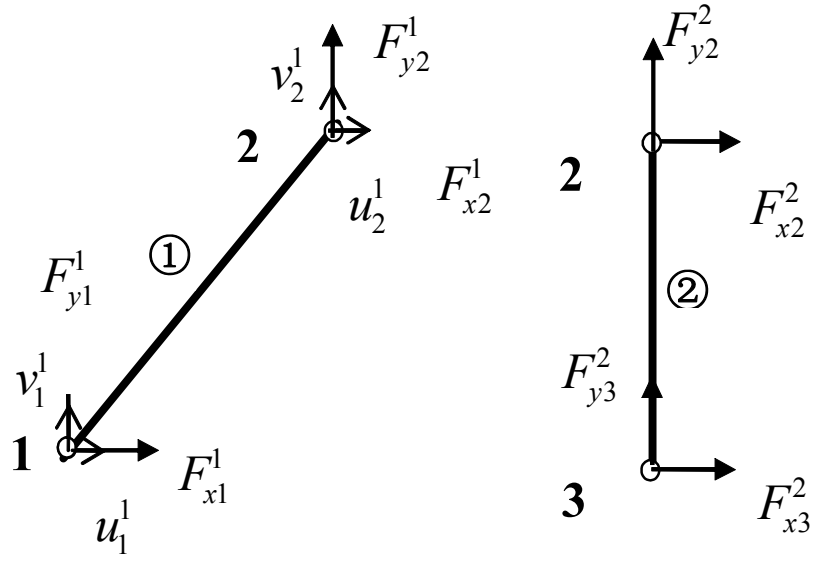
$$F_{y1}^1 = k_{21}^1 u_1^1 + k_{22}^1 v_1^1 + k_{23}^1 u_2^1 + k_{24}^1 v_2^1$$

$$F_{x2}^1 = k_{31}^1 u_1^1 + k_{32}^1 v_1^1 + k_{33}^1 u_2^1 + k_{34}^1 v_2^1$$

$$F_{y2}^1 = k_{41}^1 u_1^1 + k_{42}^1 v_1^1 + k_{43}^1 u_2^1 + k_{44}^1 v_2^1$$

实例1（离散系统）

（2）单元分析：



单元①节点力平衡方程

记为矩阵形式：

$$\{F^1\}=[K^1]\{\delta^1\}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^1 \\ F_{y1}^1 \\ F_{x2}^1 \\ F_{y2}^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ v_1^1 \\ u_2^1 \\ v_2^1 \end{Bmatrix}$$

单元②节点力平衡方程

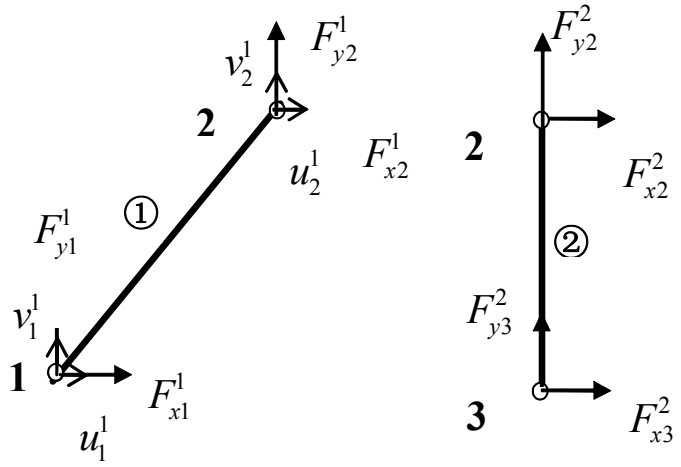
$$\{F^2\}=[K^2]\{\delta^2\}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^2 \\ F_{y1}^2 \\ F_{x2}^2 \\ F_{y2}^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ v_1^2 \\ u_2^2 \\ v_2^2 \end{Bmatrix}$$

（3）整体分析：

整体分析：作用于每个节点上的节点力平衡，即

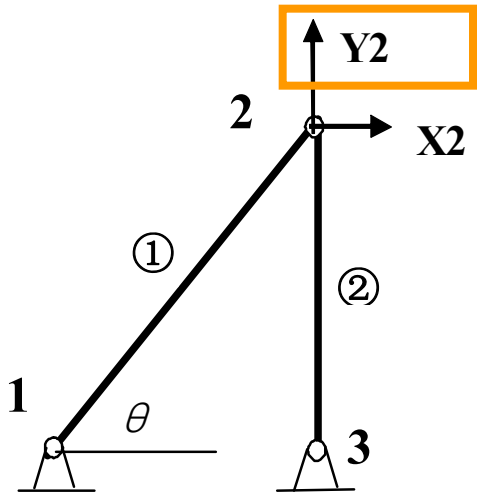
$$\sum_{e=1} F_{xi}^{e} = X_i, \qquad \sum_{e=1} F_{yi}^{e} = Y_i$$



结合前式推导得：

$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^1 \\ F_{y1}^1 \\ F_{x2}^1 \\ F_{y2}^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ v_1^1 \\ u_2^1 \\ v_2^1 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} F_{x1}^2 \\ F_{y1}^2 \\ F_{x2}^2 \\ F_{y2}^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ v_1^2 \\ u_2^2 \\ v_2^2 \end{Bmatrix}$$

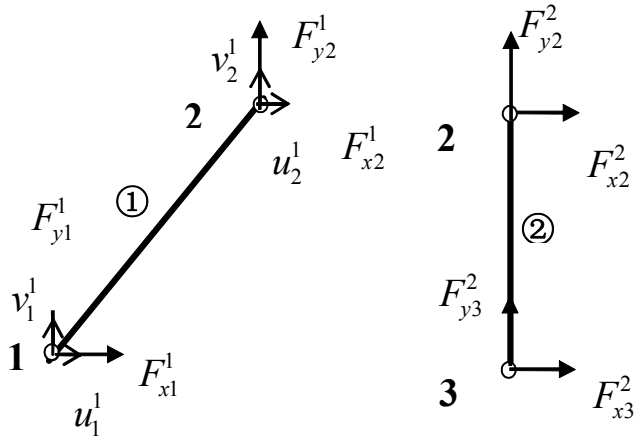
$$\begin{Bmatrix} F_{x2}^1 \\ F_{x2}^1 \\ F_{x2}^1 \\ F_{x2}^1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{13}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 & 0 & 0 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ v_1^1 \\ u_2^1 \\ v_2^1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{x2}^2 \\ F_{x2}^2 \\ F_{x2}^2 \\ F_{x2}^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ 0 & 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1^2 \\ v_1^2 \\ u_2^2 \\ v_2^2 \end{Bmatrix} = ?$$



（3）整体分析：

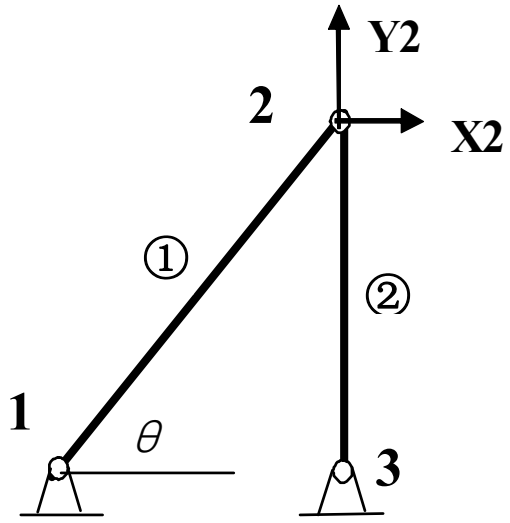
整体分析：作用于每个节点上的节点力平衡，即

$$\sum_{e=1} F_{xi}^{e} = X_i, \qquad \sum_{e=1} F_{yi}^{e} = Y_i$$



结合前式推导得：

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 + k_{11}^2 & k_{31}^1 + k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 + k_{21}^2 & k_{44}^1 + k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

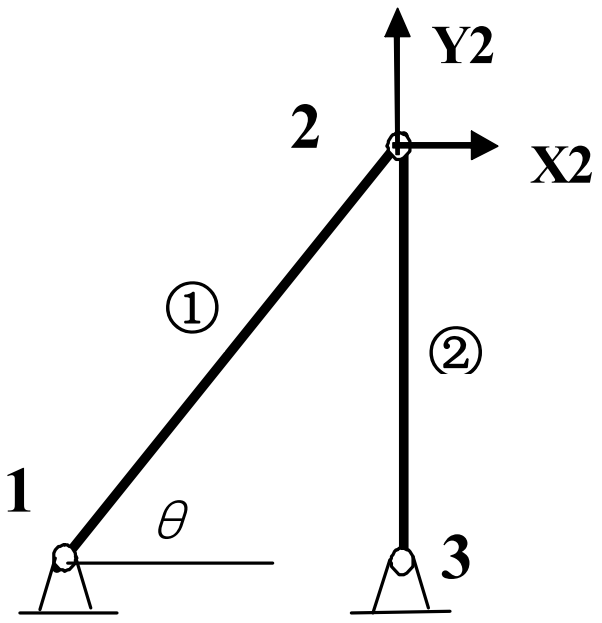


实例1（离散系统）

（4）引入约束求解：

整体矩阵记为：$[K]\{\delta\}=\{R\}$

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1+k_{11}^2 & k_{31}^1+k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1+k_{21}^2 & k_{44}^1+k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{u_1} \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{X_1} \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$



将 $u_1=v_1=u_3=v_3=0$ 代入可得整体方程（边界条件）

$$\begin{bmatrix} k_{33}^1+k_{11}^2 & k_{34}^1+k_{12}^2 \\ k_{43}^1+k_{21}^2 & k_{44}^1+k_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

实例2（连续问题）

通过材料力学求解和有限元求解进行比较

例：等截面直杆在自重作用下的拉伸 图(a)

单位杆长重量为q，杆长为L，截面面积为A，弹性模数为E

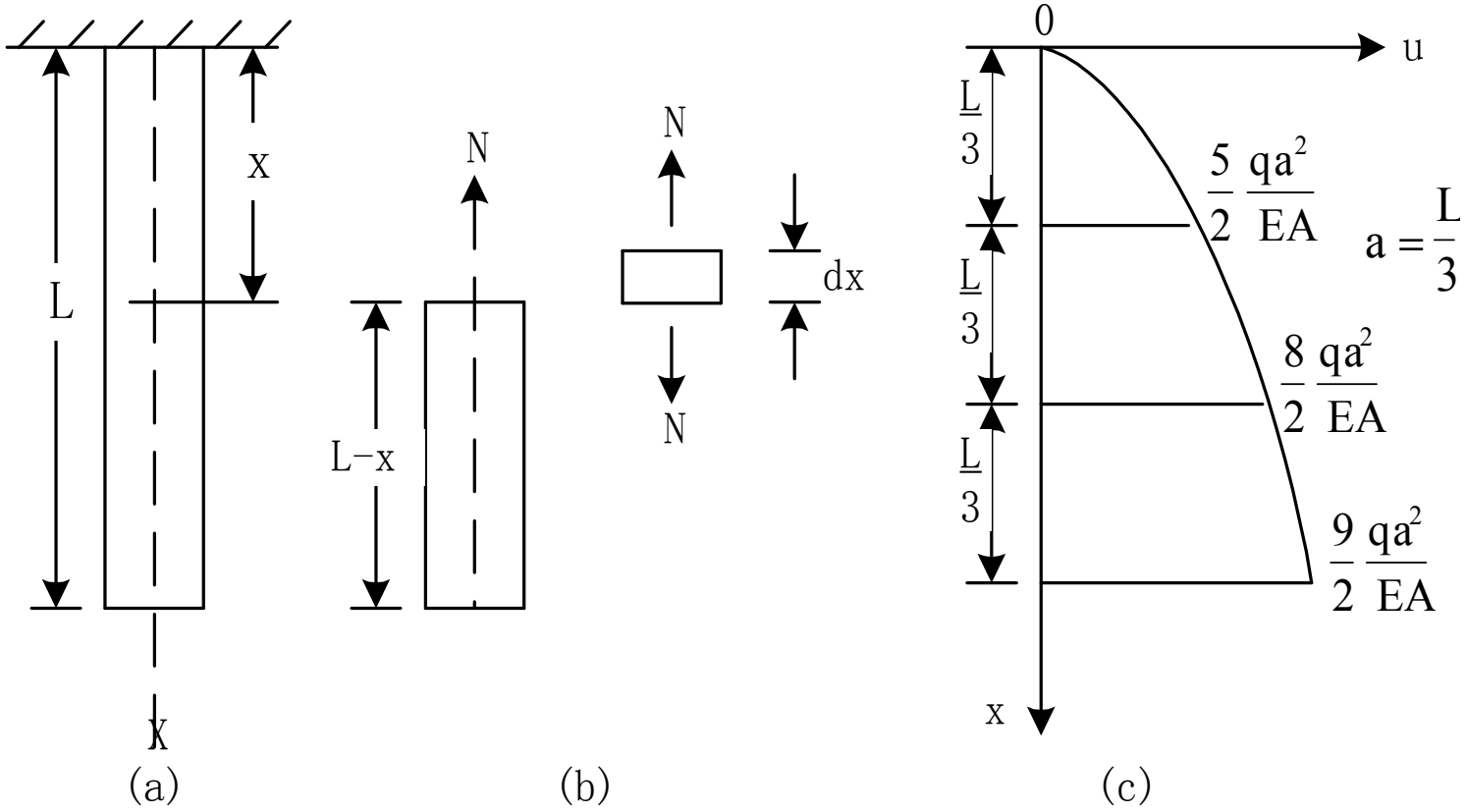


图2-1

实例2（连续问题）

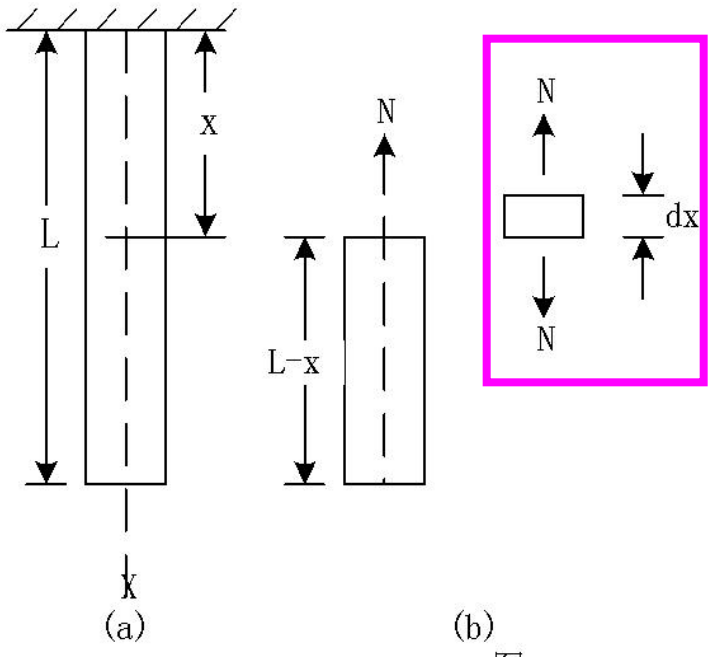
材料力学方法求解直杆拉伸：图(b)---位移法

考虑微段dx，内力 N=q (L-x)

dx的伸长为 $\Delta(dx)=\dfrac{N(x)dx}{EA}=\dfrac{q(L-x)dx}{EA}$

x截面上的位移：

$$u=\int_0^x \Delta(dx)=\int_0^x \frac{q(L-x)dx}{EA}=\frac{q}{EA}(Lx-\frac{x^2}{2})$$



根据几何方程求应变，物理方程求应力。这里

应变 $\varepsilon_x=\dfrac{du}{dx}=\dfrac{q}{EA}(L-x)$ 应力 $\sigma_x=E\varepsilon_x=\dfrac{q}{A}(L-x)$

实例2（连续问题）

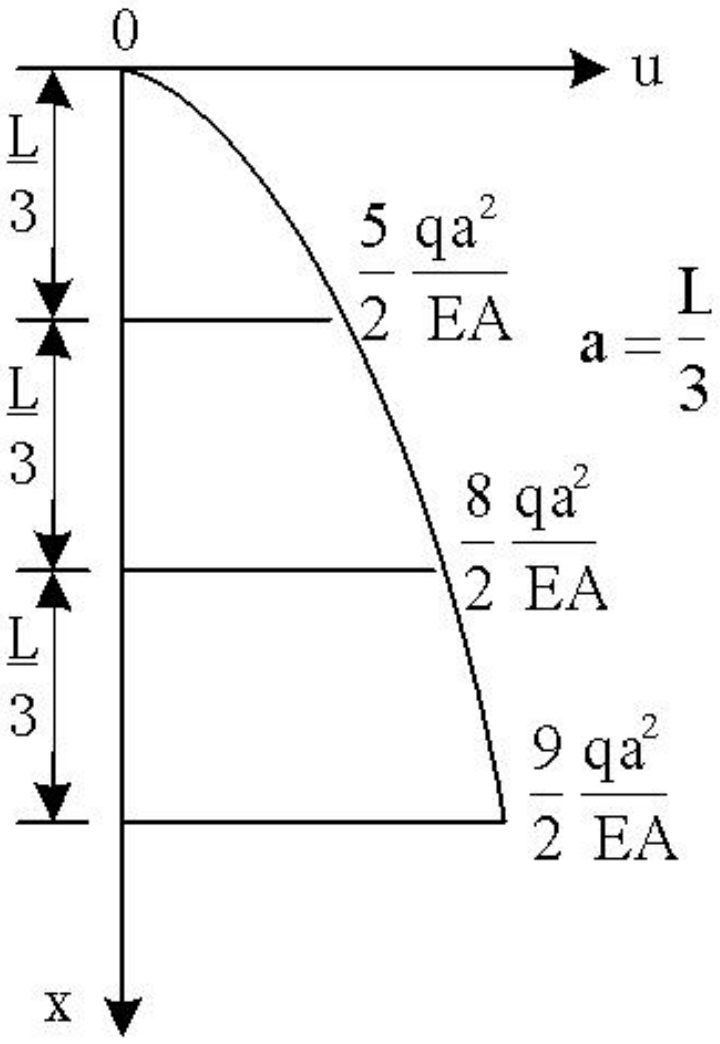
$$u=\frac{q}{EA}\left(Lx-\frac{x^2}{2}\right)$$

令 $a=\frac{L}{3}$

取 $x=a$ 则 $u=\frac{5}{2}\frac{qa^2}{EA}$

$x=2a$ $u=\frac{8}{2}\frac{qa^2}{EA}$

$x=3a$ $u=\frac{9}{2}\frac{qa^2}{EA}$



实例2（连续问题）

有限单元法求解直杆拉伸：结构离散

①离散化

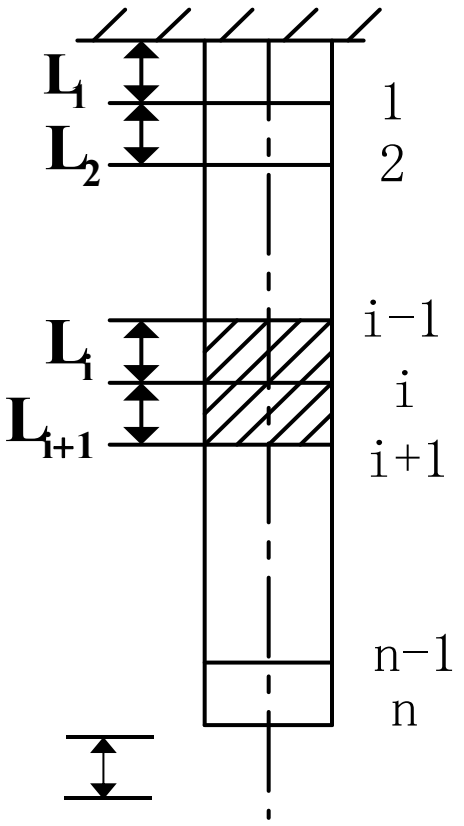
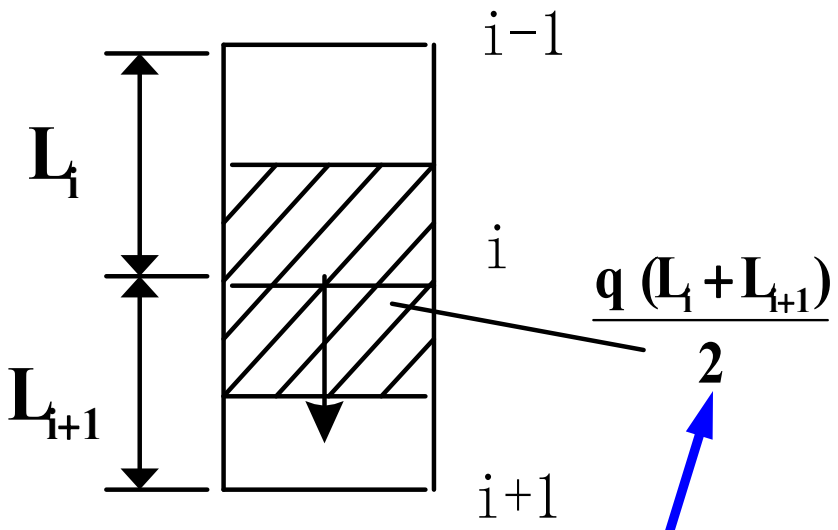
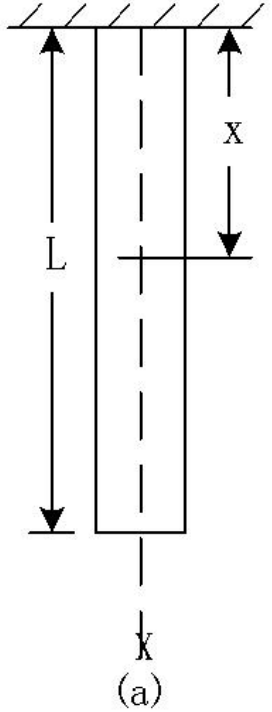


图2-2

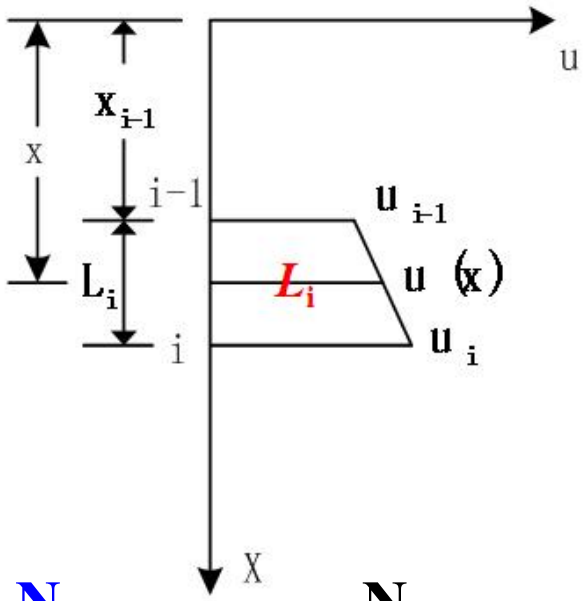
②外载荷集中到节点上，即把投影部分的重量作用在节点i上

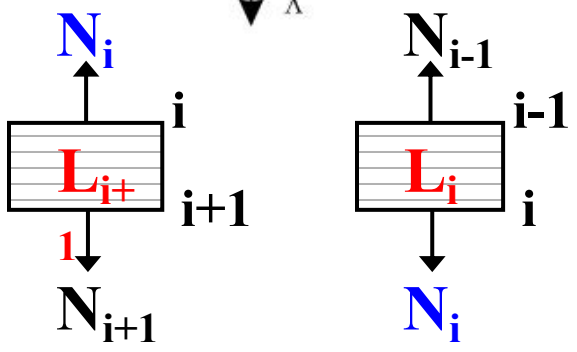




每个节点都受到外力作用（即重力），相当于把重力平分到每个节点上。

有限单元法求解直杆拉伸：单元分析





③假设线单元L_i上的位移为线性函数，对于第L_i个单元

$$u(x) = ax + b$$

将 $u_{i-1} = u(x_{i-1}) = ax_{i-1} + b$，$u_i = u(x_i) = ax_i + b$ 代入上式，得到

$$u = u(x) = u_{i-1} + \frac{u_i - u_{i-1}}{L_i}(x - x_{i-1})$$

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{u_i - u_{i-1}}{L_i}, \quad \sigma_i = E\varepsilon_i = E\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{L_i}\right) \quad N_i^{L_i} = A\sigma_i = AE\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{L_i}\right)$$

同理，对于第L_{i+1}个单元 $N_i^{L_{i+1}} = AE\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{L_{i+1}}\right)$

实例2（连续问题）

有限单元法求解直杆拉伸：单元分析

$$N_i^{L_i} = AE\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{L_i}\right)$$

$$N_i^{L_{i+1}} = AE\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{L_{i+1}}\right)$$

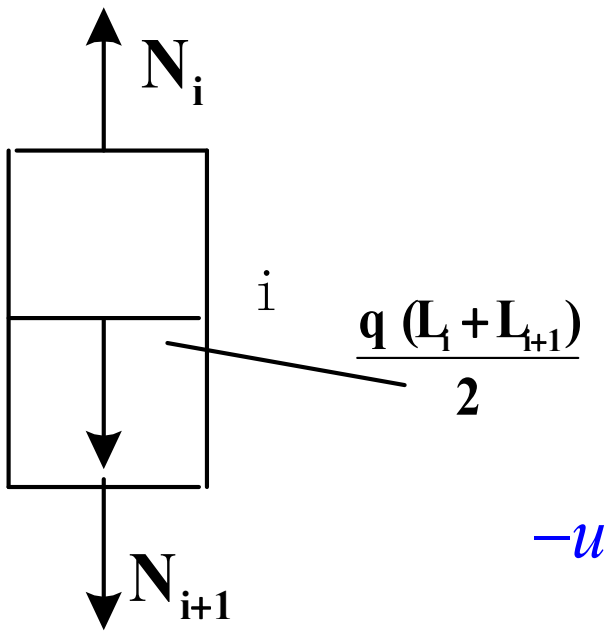


图2-5

④以i节点为对象，

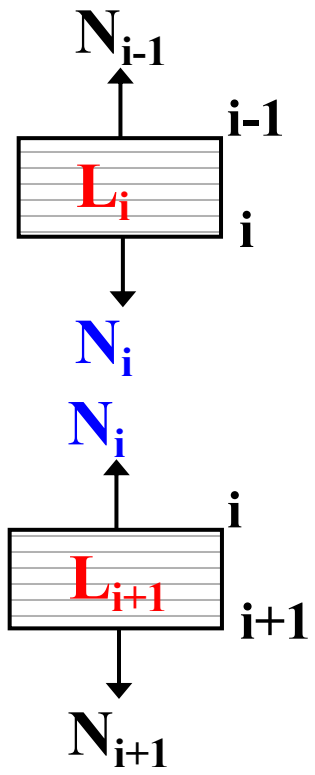
力的平衡方程 $\sum F_x = 0$

$$N_i^{L_i} - N_i^{L_{i+1}} = \frac{q\ (L_i + L_{i+1})}{2}$$

将位移和内力的关系代入得

$$-u_{i-1} + (1+\lambda_i)\,u_i - \lambda_i u_{i+1} = \frac{q}{2EA}\left(1+\frac{1}{\lambda_i}\right)L_i^2$$

其中 $\lambda_i = \frac{L_i}{L_{i+1}}$



用节点位移表示的平衡方程，其中i=1，2，… n有n个方程
未知数也有n个，解方程组，得出节点位移，进而计算应力

实例2（连续问题）

有限单元法求解直杆拉伸：整体分析与求解

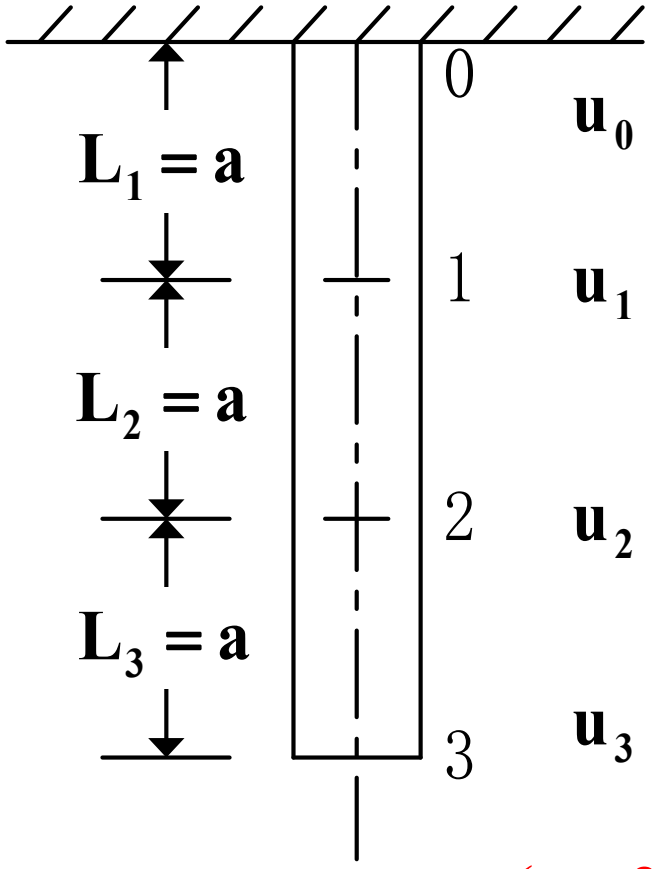


图2-6

$$-u_{i-1} + (1+\lambda_i)\, u_i - \lambda_i u_{i+1} = \frac{q}{2EA}\left(1+\frac{1}{\lambda_i}\right) L_i^2$$

假设线单元数为3个的情况，平衡方程有3个：

i=1时，$2u_1 - u_2 = \frac{q}{EA}a^2 \quad (u_0 = 0)$

i=2时，$-u_1 + 2u_2 - u_3 = \frac{q}{EA}a^2$

i=3时，$-u_2 + u_3 = \frac{q}{2EA}a^2$

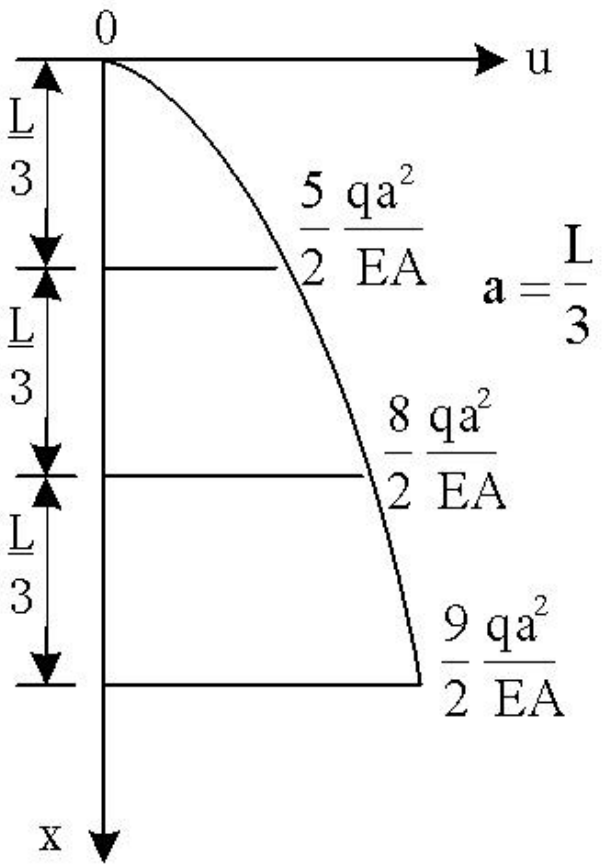
$$(i = 3\text{时}，\ N_i^{L_i} - N_i^{L_{i+1}} = \frac{q\ (L_i + L_{i+1})}{2}，\ \text{其中} N_i^{L_{i+1}} = 0，\ L_{i+1} = 0)$$

实例2（连续问题）

有限单元法求解直杆拉伸：整体分析与求解

方程组求解：

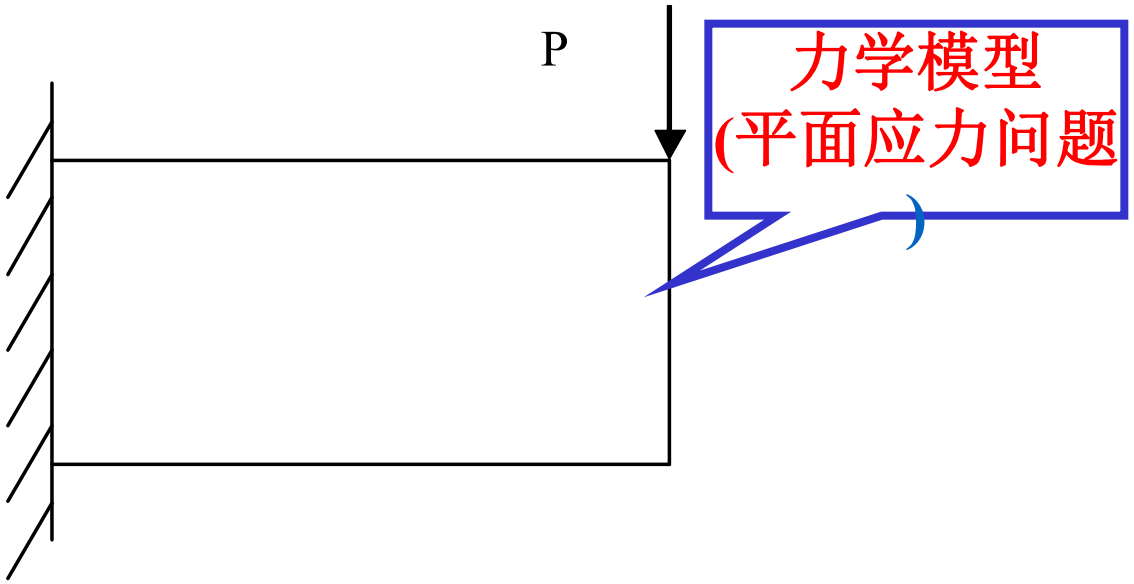
$$\begin{cases} 2u_1 - u_2 = \dfrac{q}{EA}a^2 \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 = \dfrac{q}{EA}a^2 \\ -u_2 + u_3 = \dfrac{q}{2EA}a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{5}{2}\dfrac{qa^2}{EA} \\ u_2 = \dfrac{8}{2}\dfrac{qa^2}{EA} \\ u_3 = \dfrac{9}{2}\dfrac{qa^2}{EA} \end{cases}$$

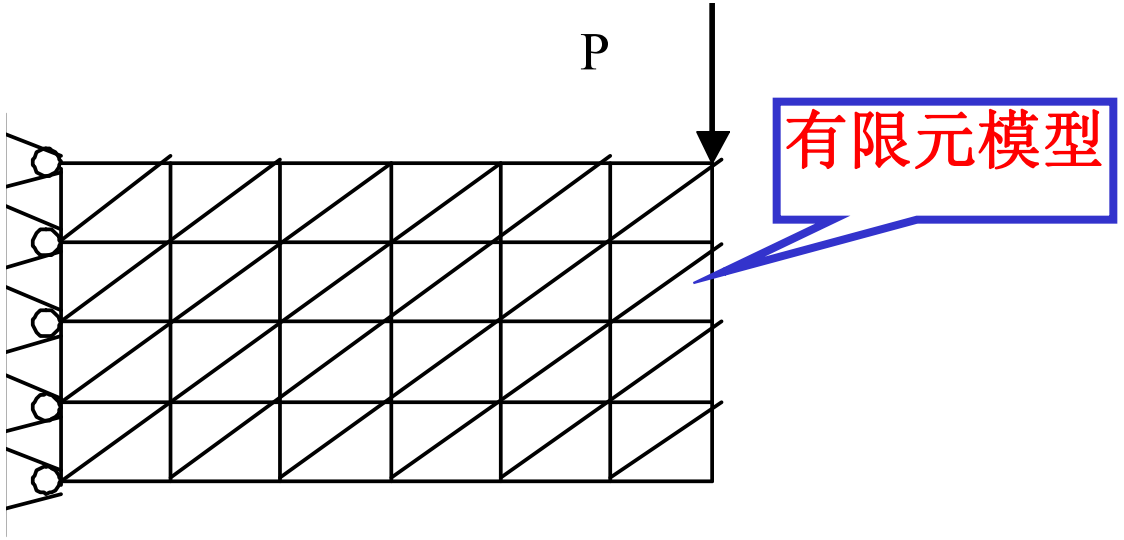


有限单元法与材料力学的精确解答在节点处完全相同。

3. 有限元法的基本步骤与相关概念

1. 所研究问题的数学建模
2. 物体离散
3. 单元分析
4. 整体分析与求解
5. 结果分析及后处理





3. 有限元法的基本步骤与相关概念

- 结构离散（有限元建模）
- 内容：

1. 网格划分---即把结构按一定规则分割成有限单元

2. 边界处理---即把作用于结构边界上约束和载荷处理为节点约束和节点载荷

- 要求：

1. 离散结构必须与原始结构保形----单元的几何特性

2. 一个单元内的物理特性必须相同----单元的物理特性(例如：材料等)

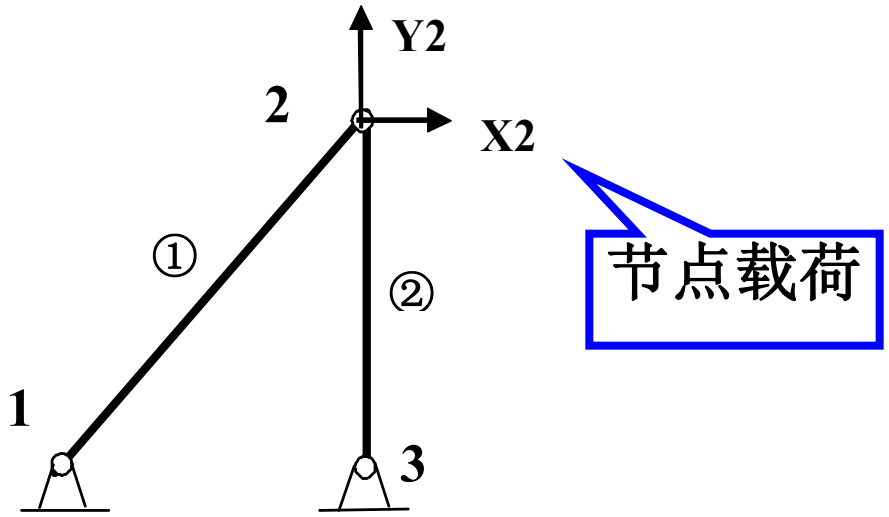
$$\Omega = \bigcup E_i$$

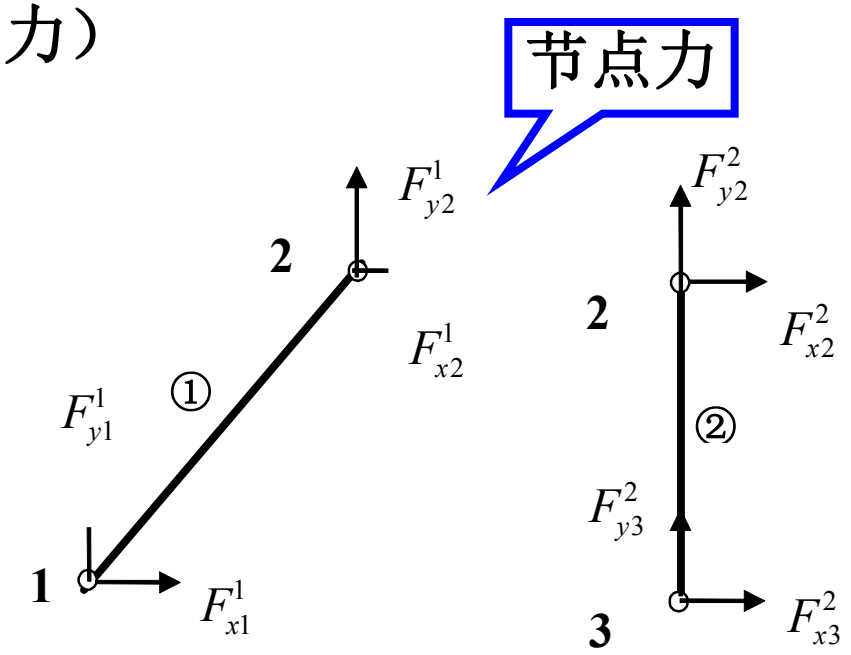
$$E_i \cap E_j = 0 \vee p_i \vee e_i \vee f_i$$

3. 有限元法的基本步骤与相关概念

■ 单元与节点

- ■ 单元：即原始结构离散后，满足一定几何特性和物理特性的最小结构域
- ■ 节点：单元与单元间的连接点。
- ■ 节点力：单元与单元间通过节点的相互作用力（即内力）
- ■ 节点载荷：作用于节点上的外载（即外力）





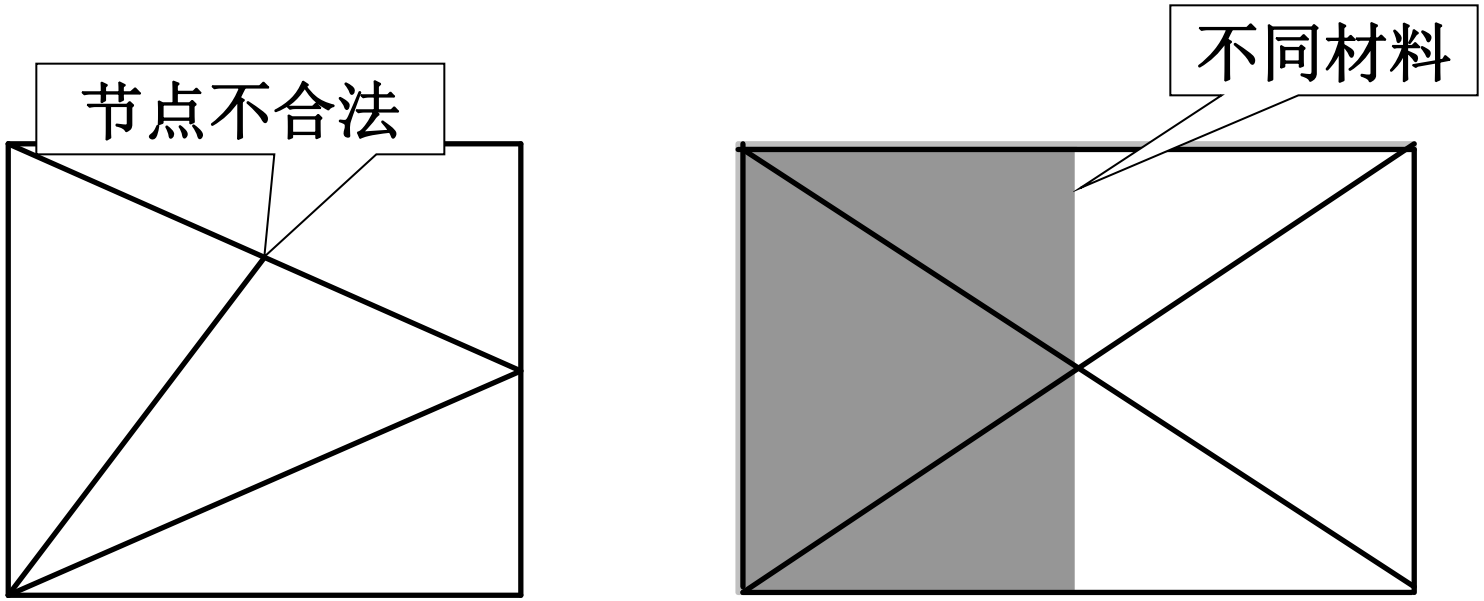
3. 有限元法的基本步骤与相关概念

注意：

①节点是有限元法的重要概念，有限元模型中，相邻单元的作用通过节点传递，而单元边界不传递力，这是离散结构与实际结构的重大差别；

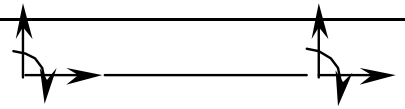
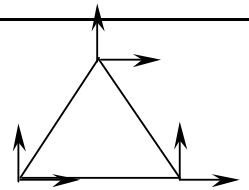
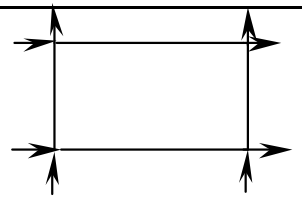
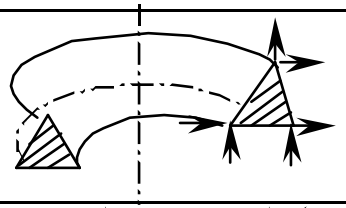
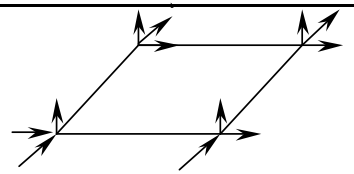
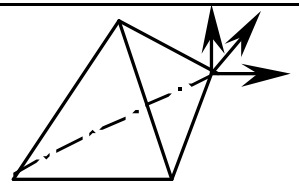
②节点力与节点载荷的差别

非法结构离散



3. 有限元法的基本步骤与相关概念

典型单元类型

单元类型	单元图形	节点数	节点自由度
一维杆单元		2	1
二维梁单元		2	3
平面单元		3	2
平面四边形		4	2
二维轴对称问题		3	2
二维板壳单元		4	3
四面体单元		4	3

■ 插值函数（或位移函数）

用以表示单元内物理量变化（如位移或位移场）的近似函数。由于该近似函数常由单元节点物理量值插值构成，故称为插值函数，如单元内物理量为位移，则该函数称为位移函数。

选择位移函数的一般原则：

1）位移函数在单元节点的值应等于节点位移（即单元内部是连续的）；

2）所选位移函数必须保证有限元的解收敛于真实解。

注：为了便于微积分运算，位移函数一般采用多项式形式，在单元内选取适当阶次的多项式可得到与真实解接近的近似解。

3. 有限元法的基本步骤与相关概念

①广义坐标法

一维单元 $u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n$

位移函数： 简记为 $u(x) = \Phi a$

$$\Phi = \{1 \quad x \quad x^2 \quad \ldots \quad x^n\}$$

$$a = \{a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n\}^T$$

a_i 为待定系数，也称为广义坐标

②插值函数法 即将位移函数表示为各个节点位移与已知插值基函数积的和。

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + \ldots$$

$$= \sum_1^n N_i(x)u_i$$

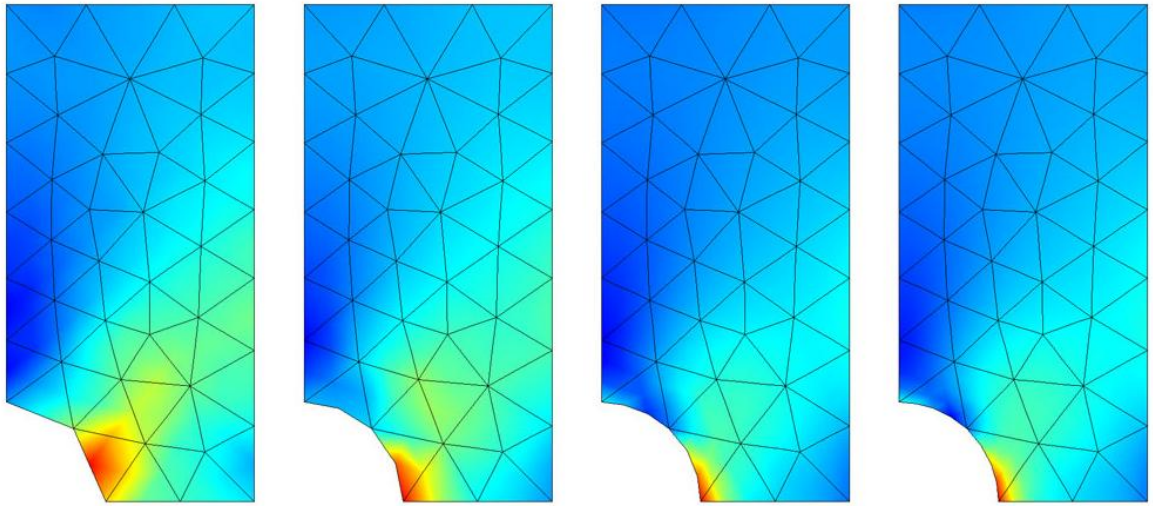
$$u(x,y) = \sum_1^n N_i u_i$$

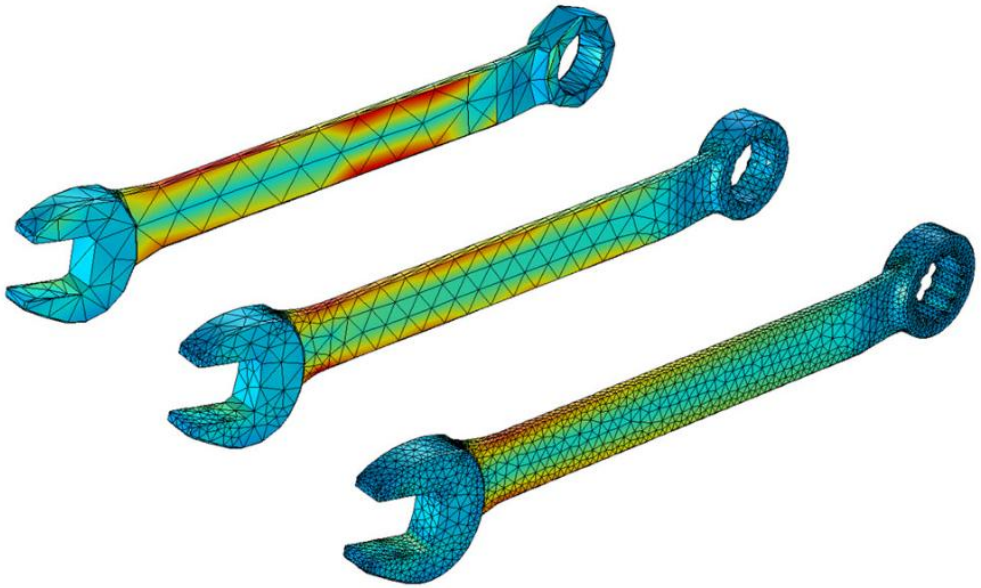
$$v(x,y) = \sum_1^n N_i v_i$$

注：Ni可为Lagrange、Hamiton多项式或形函数，在0~1间变化

有限元法的收敛准则

- 影响有限元解的误差：
  - （1）离散误差
  - （2）位移函数误差
- 提高有限元解精度的方法：
  - （1）增加单元的网格数量
  - （2）位移函数选用高阶多项式（高阶单元）





有限元法的收敛准则

➢ **收敛准则：**

1）位移函数必须包括常量应变（即线形项）（位移在单元内和边界上为线性变化，应变为常量）；

2）位移函数必须包括单元的刚性位移（即常量项）；

3）位移函数在单元内部必须连续（连续性条件）；

4）位移函数应使得相邻单元间的位移协调（协调性条件）；

注：上述四个条件称为有限元解收敛于真实解的充分条件；前三个条件称为必要条件。满足四个条件的位移函数构成的单元称为协调元；满足前三个条件的单元称为非协调元；满足前两个条件的单元称为完备元。

4. 有限元法的形成与发展

在寻找连续系统求解方法的过程中，工程师和数学家从两种不同的路线得到了相同的结果，即有限元法。有限元法的形成可以回顾到二十世纪50年代，来源于固体力学中矩阵结构法的发展和工程师对结构相似性的直觉判断。从固体力学的角度来看，桁架结构等标准离散系统与人为分割成有限个分区后的连续系统在结构上存在相似性。

1956年M.J.Turner, R.W.Clough, H.C.Martin, L.J.Topp在纽约举行的航空学会年会上介绍了一种新的计算方法，将矩阵位移法推广到求解平面应力问题。他们把结构划分成一个个三角形和矩形的“单元”，利用单元中近似位移函数，求得单元节点力与节点位移关系的单元刚度矩阵。

4. 有限元法的形成与发展

1954-1955年，J.H.Argyris在航空工程杂志上发表了一组能量原理和结构分析论文。

1960年，Clough在他的名为“The finite element in plane stress analysis”的论文中首次提出了有限元（finite element）这一术语。

数学家们则发展了微分方程的近似解法，包括有限差分方法，变分原理和加权余量法。

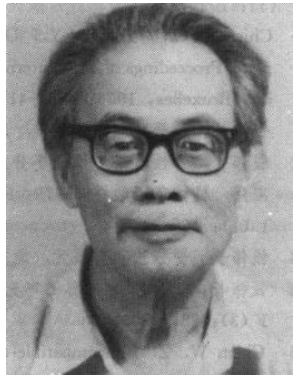
在1963年前后，经过J.F.Besseling, R.J.Melosh, R.E.Jones, R.H.Gallaher, T.H.Pian（卞学磺）等许多人的工作，认识到有限元法就是变分原理中Ritz近似法的一种变形，发展了用各种不同变分原理导出的有限元计算公式。

1965年O.C.Zienkiewicz和Y.K.Cheung（张佑启）发现只要能写成变分形式的所有场问题，都可以用与固体力学有限元法的相同步骤求解。

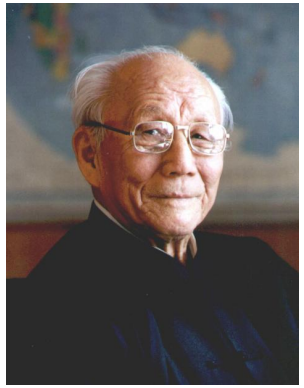
1969年B.A.Szabo和G.C.Lee指出可以用加权余量法特别是Galerkin法，导出标准的有限元过程来求解非结构问题。

4. 有限元法的形成与发展

我国的力学工作者为有限元方法的初期发展做出了许多贡献，其中比较著名的有：陈伯屏（结构矩阵方法），钱令希（余能原理），钱伟长（广义变分原理），胡海昌（广义变分原理），冯康（有限单元法理论）。



陈伯屏



钱令希

钱伟长

目 录

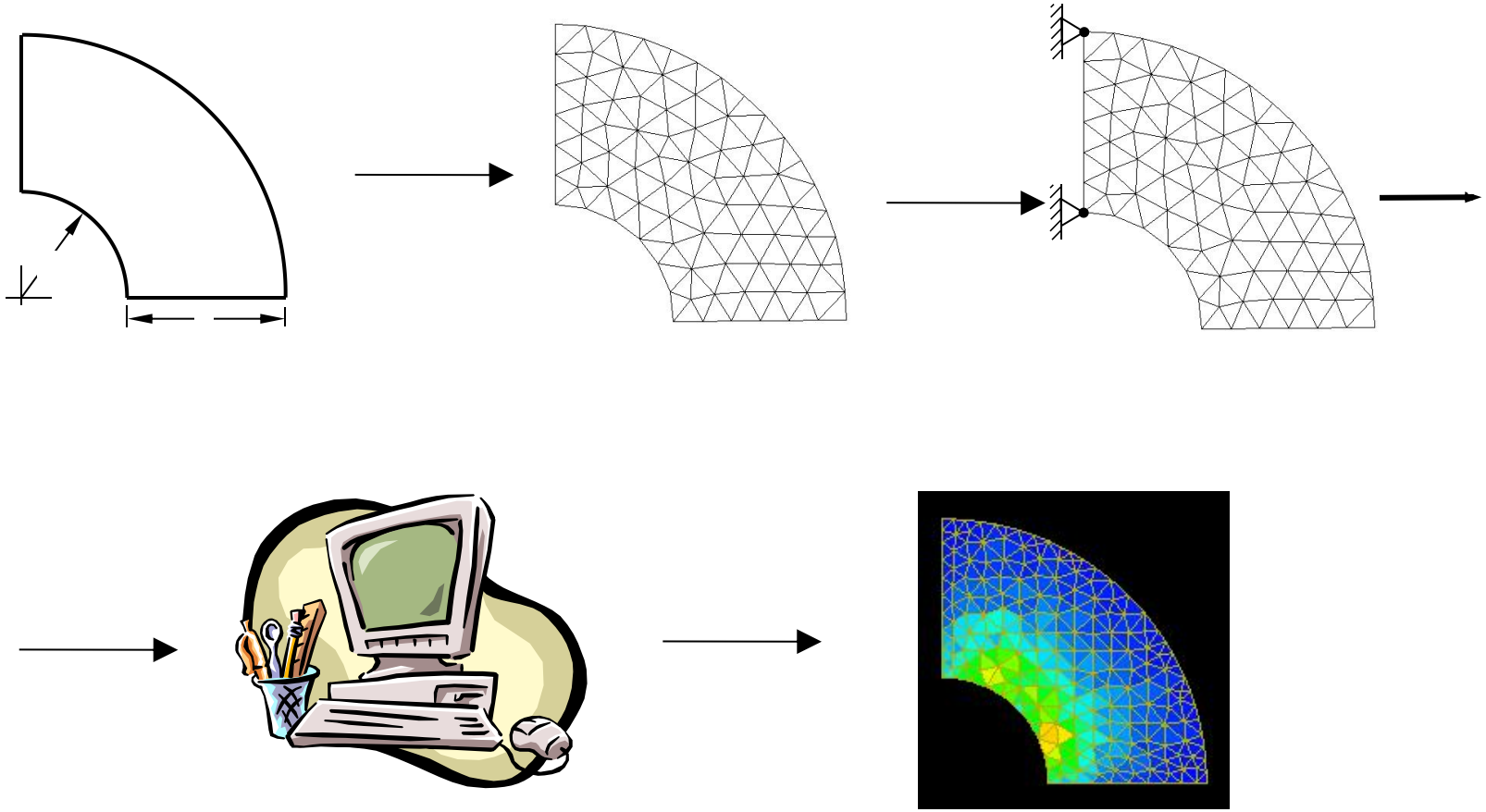
1. 有限元分析

1. 场问题的一般描述
2. 有限元法基本思想
3. 有限元法的基本步骤与相关概念
4. 有限元法的形成与发展
5. 有限元分析

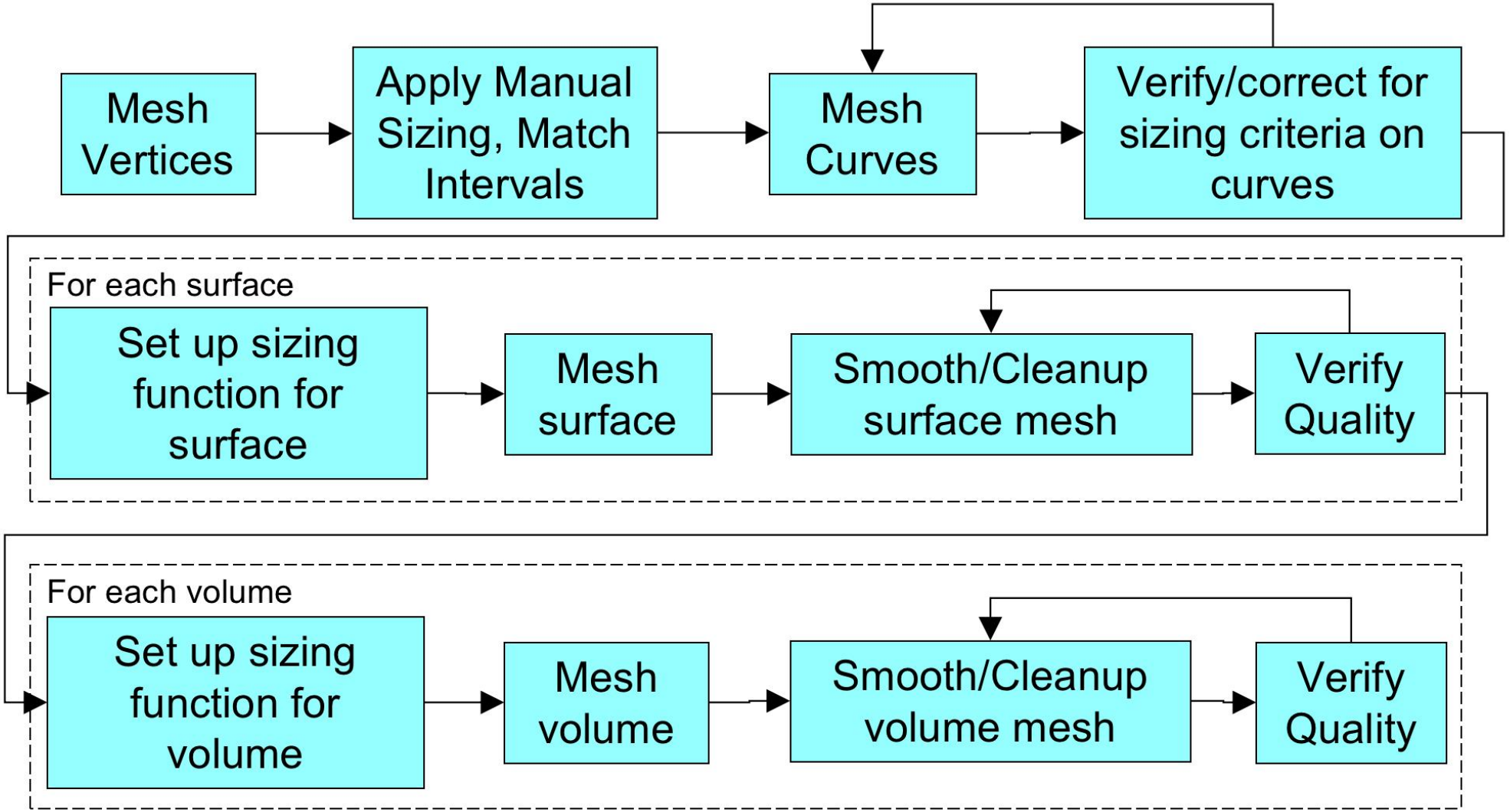
2. 网格生成

1. 非结构化网格
2. 结构化网格

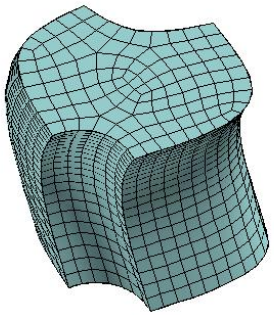
Simulation Process

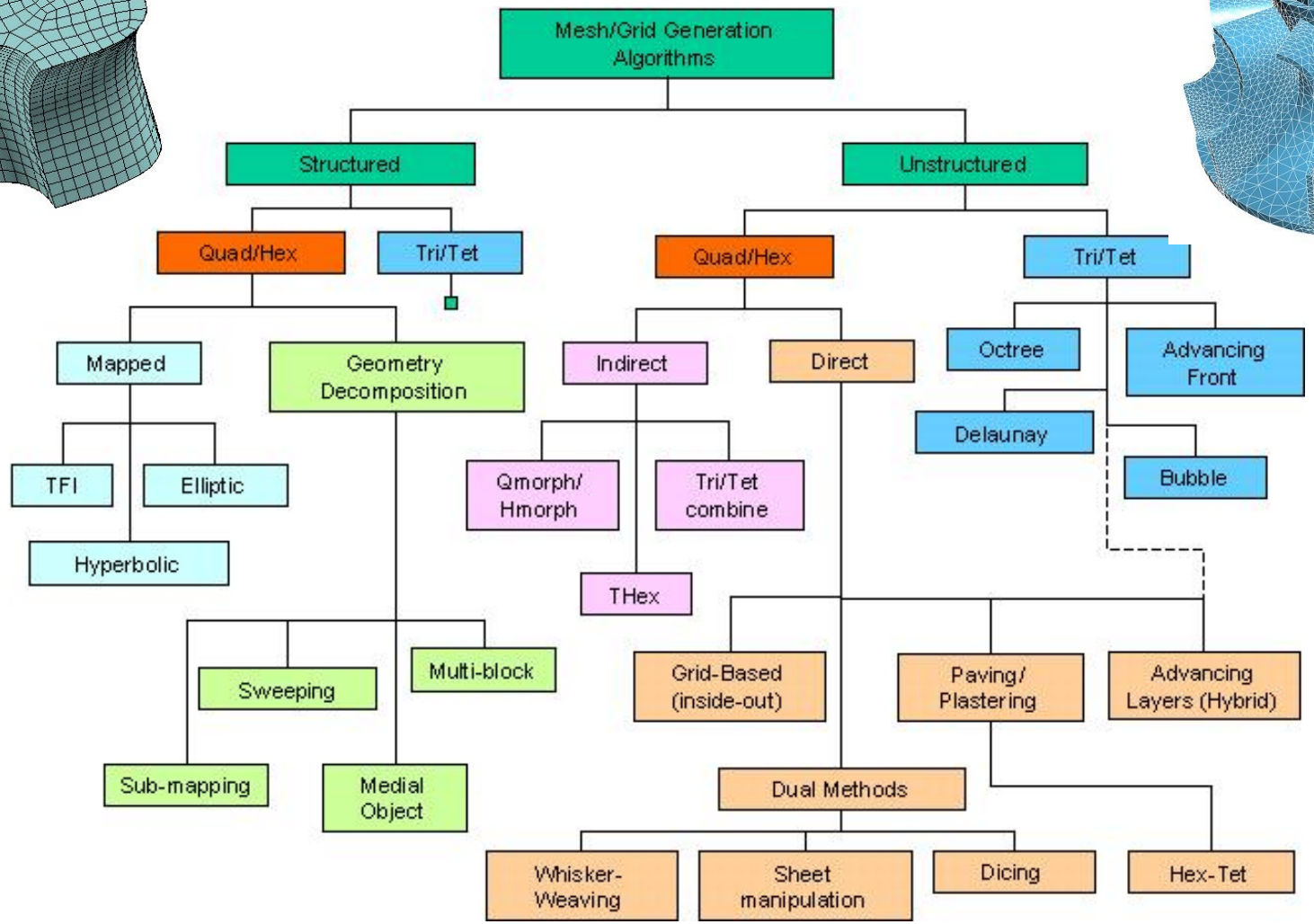


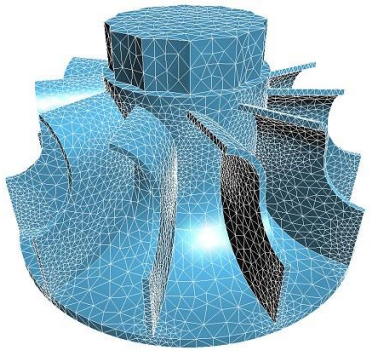
Mesh Generation Process



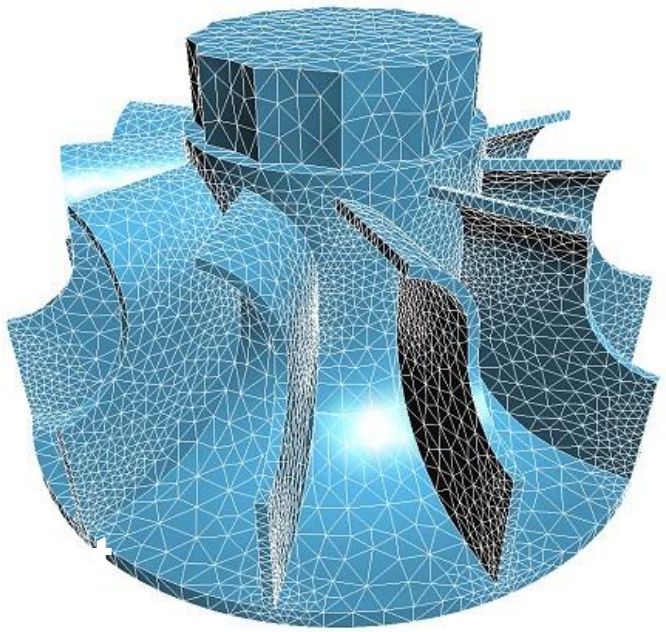
Meshing Algorithms

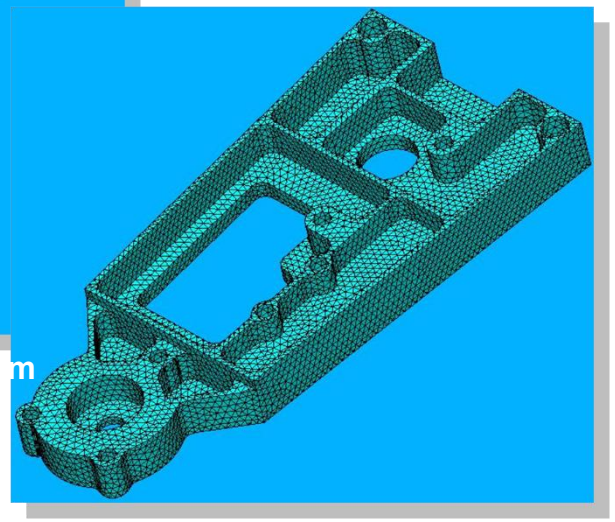


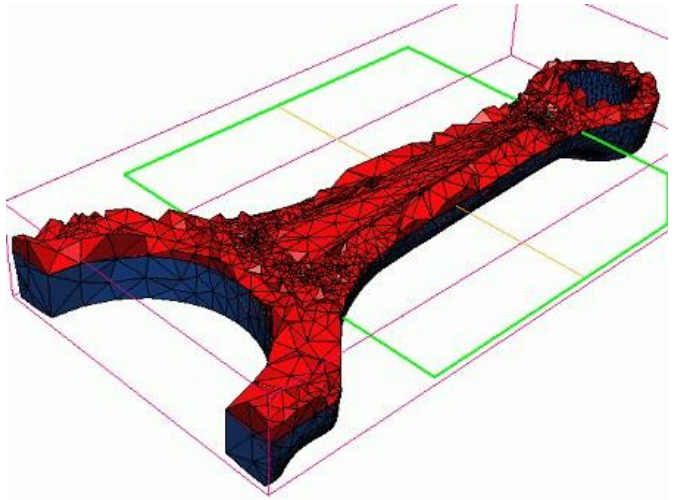




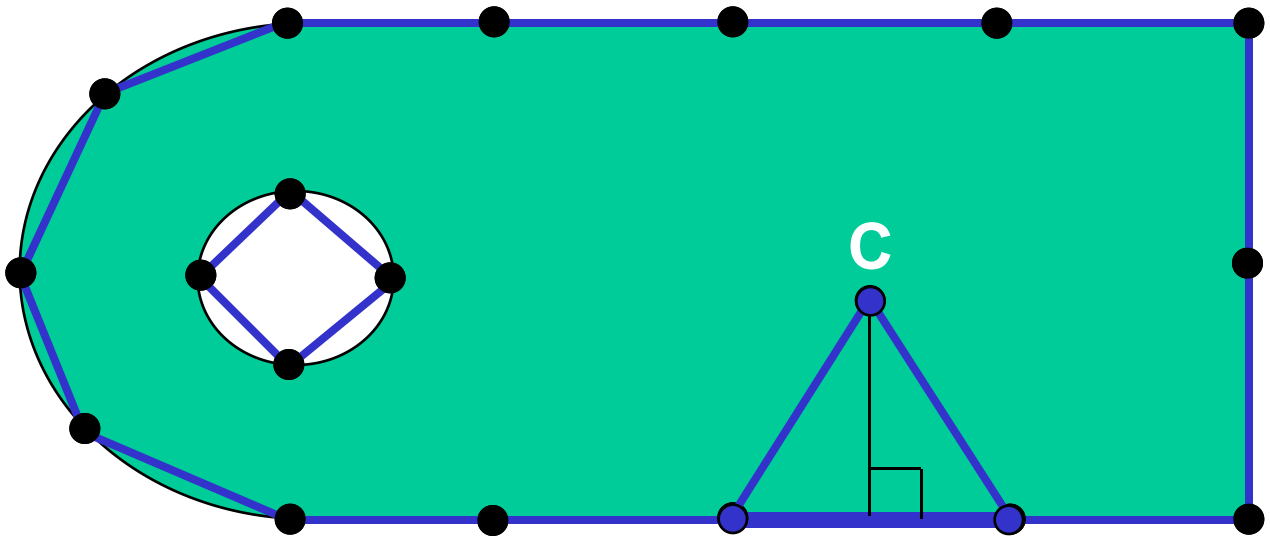
Tri/Tet Methods



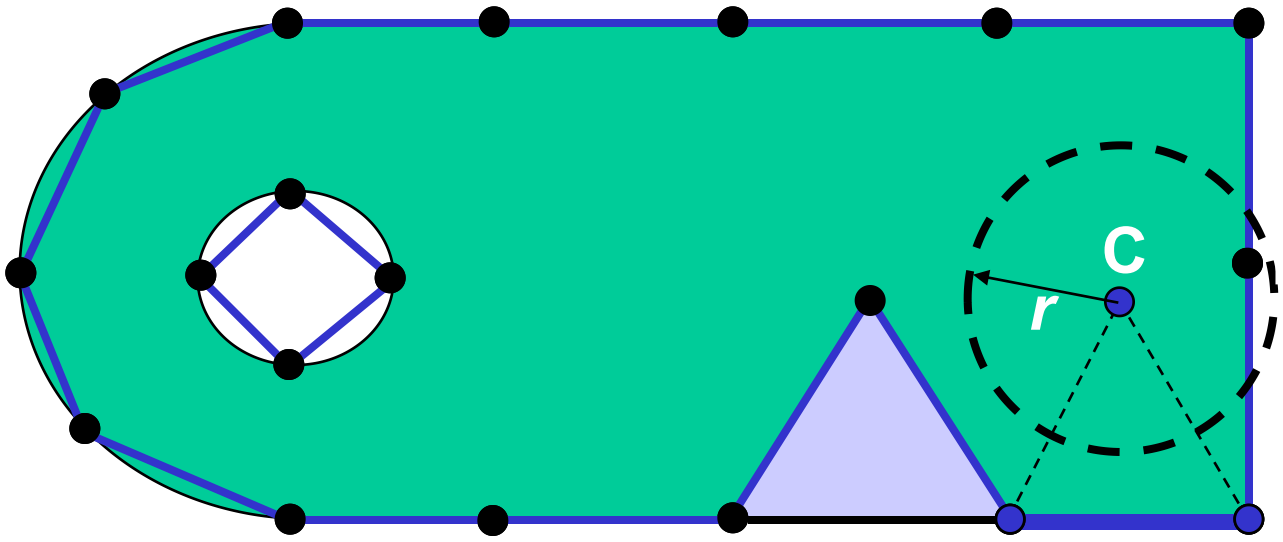




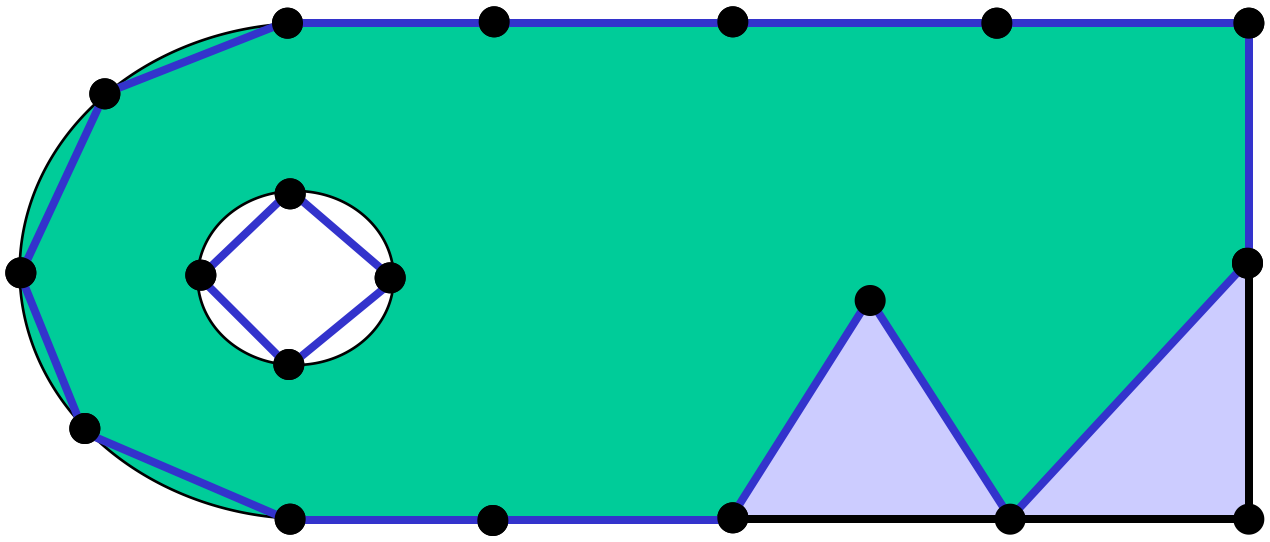
Advancing Front



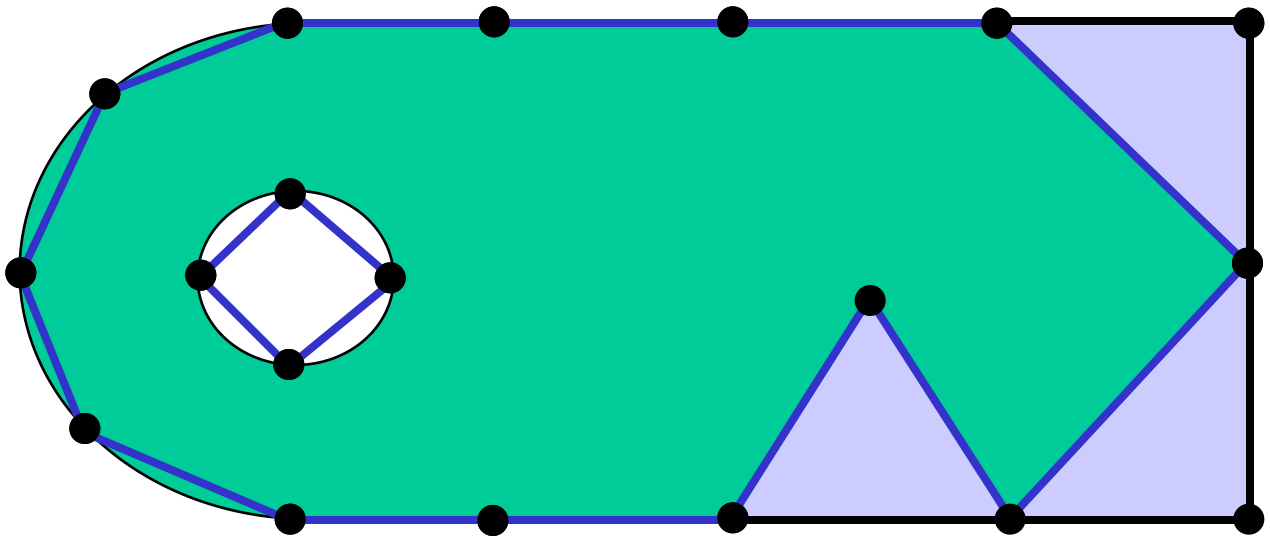
Advancing Front



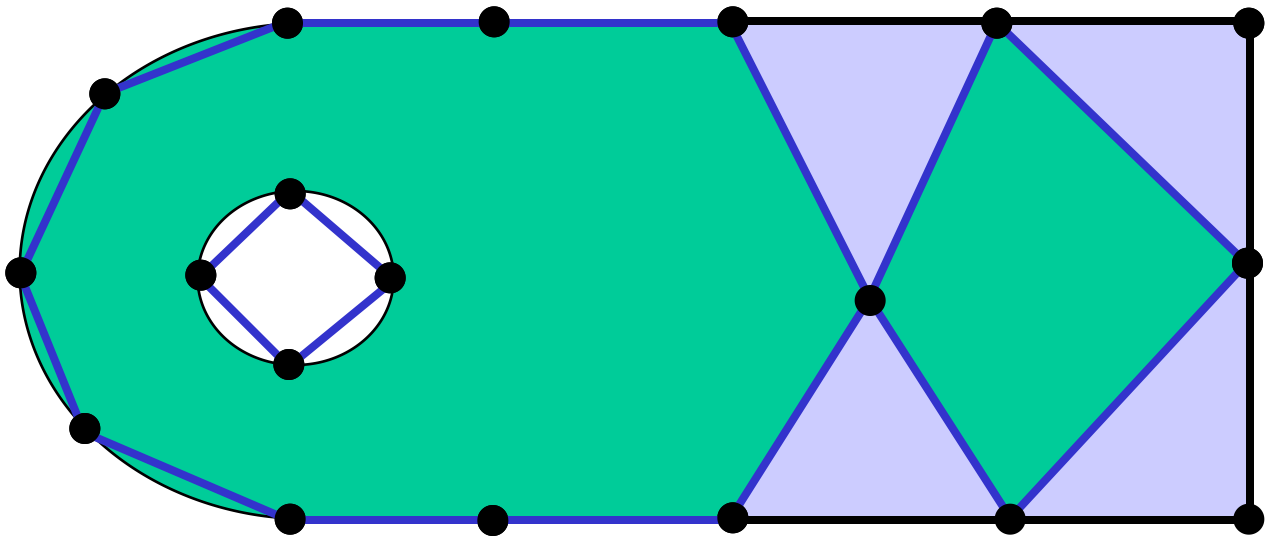
Advancing Front



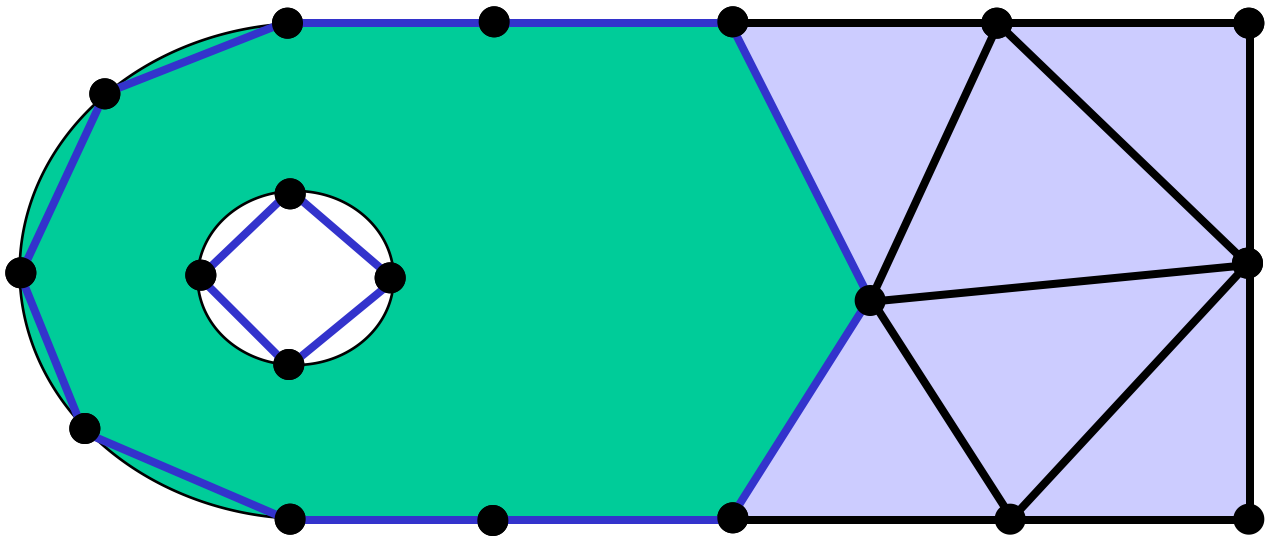
Advancing Front



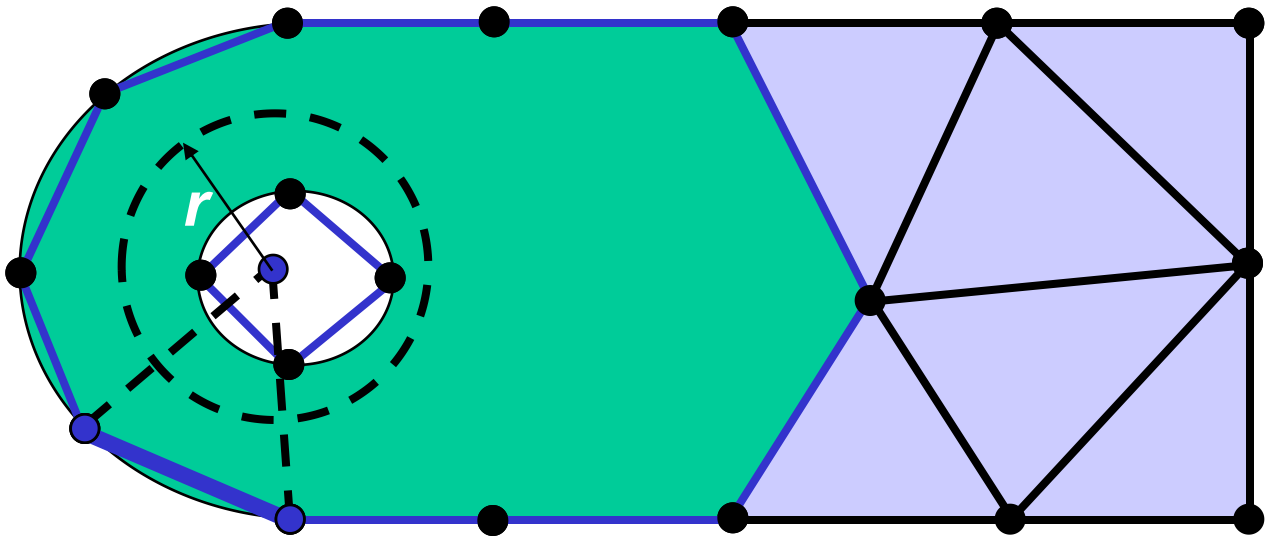
Advancing Front



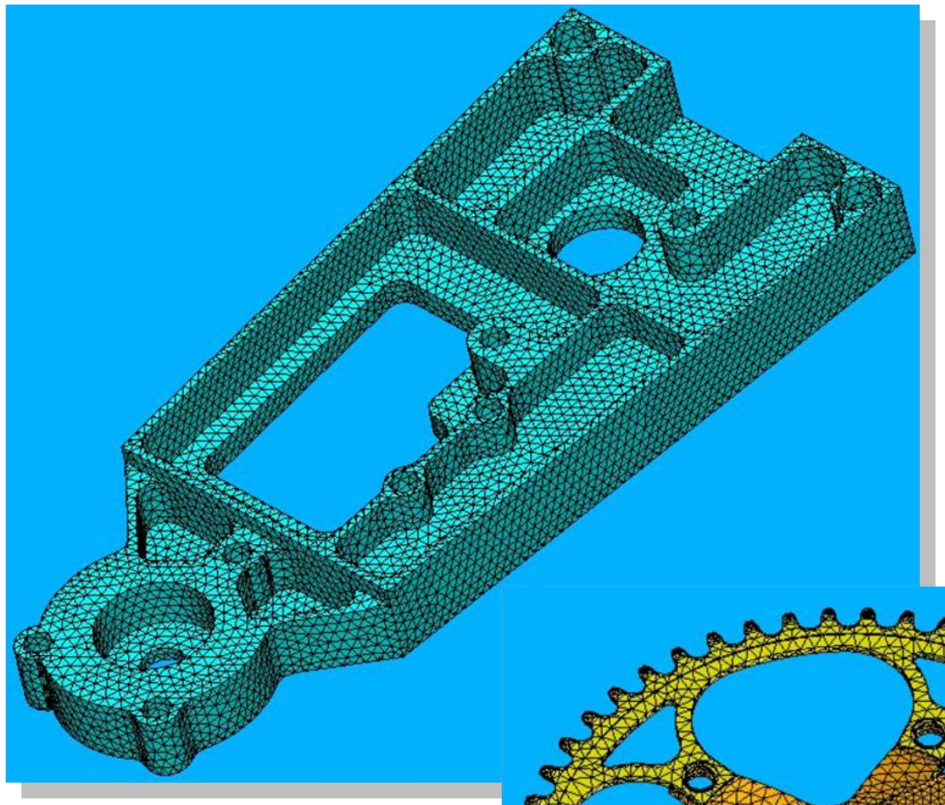
Advancing Front

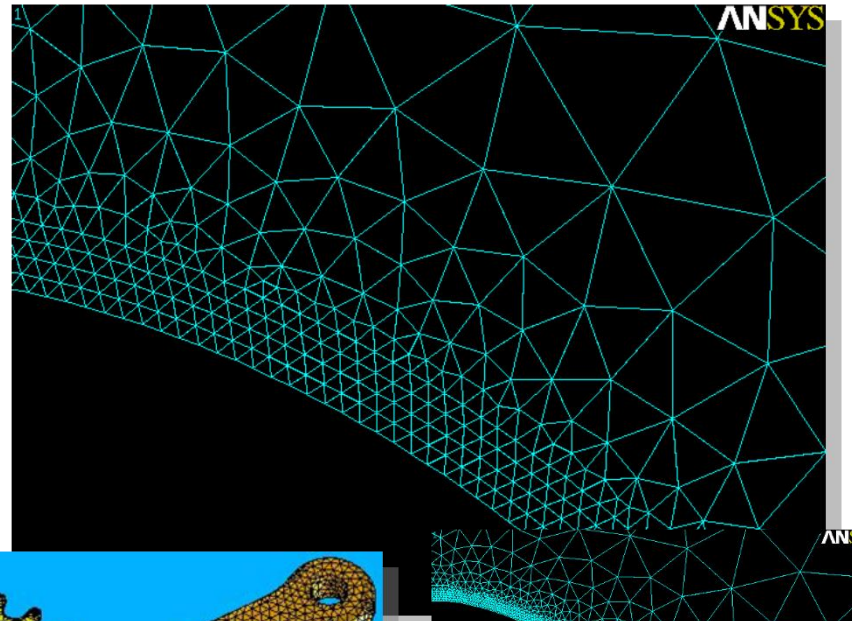


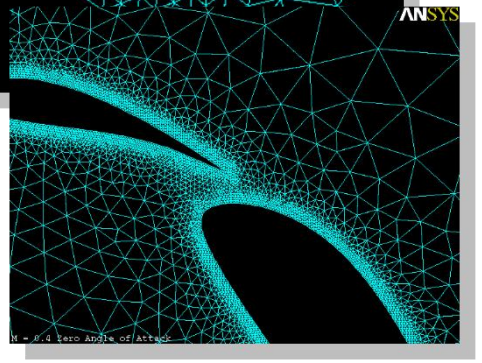
Advancing Front



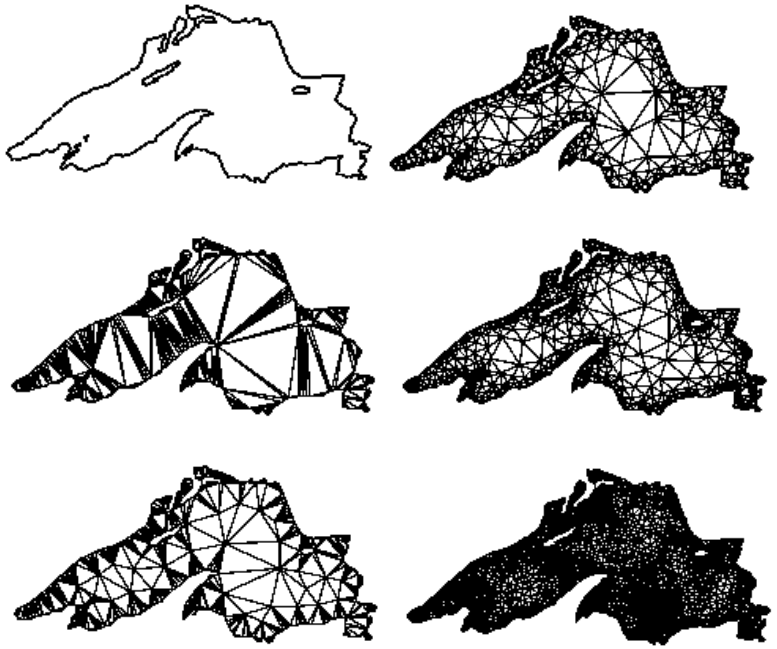
Advancing Front

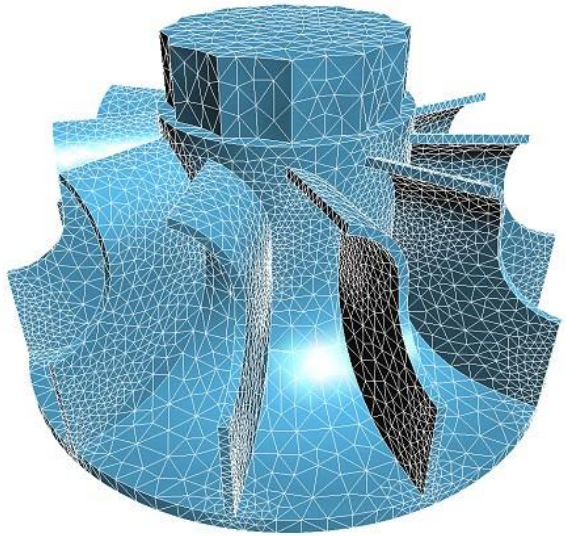


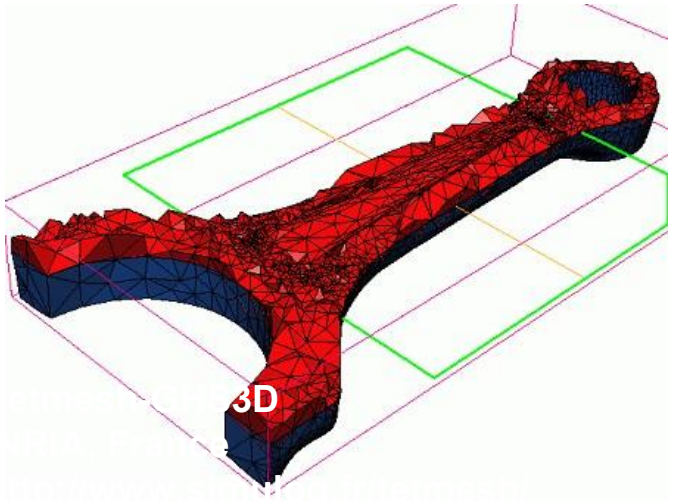




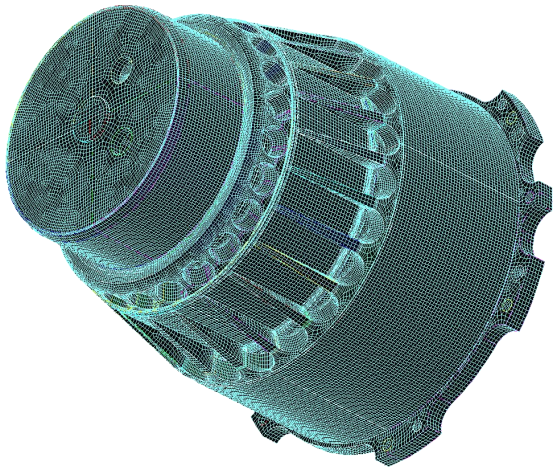
Delaunay

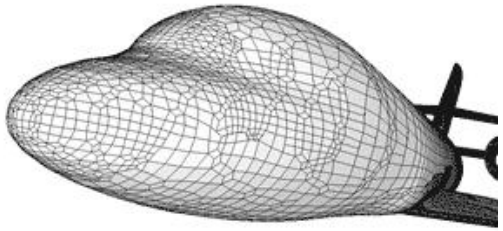


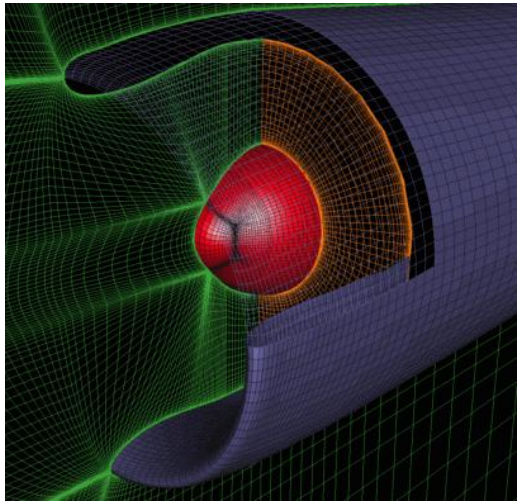


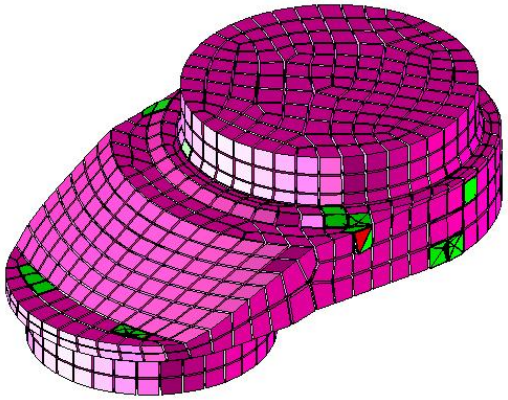


Quad/Hex Methods

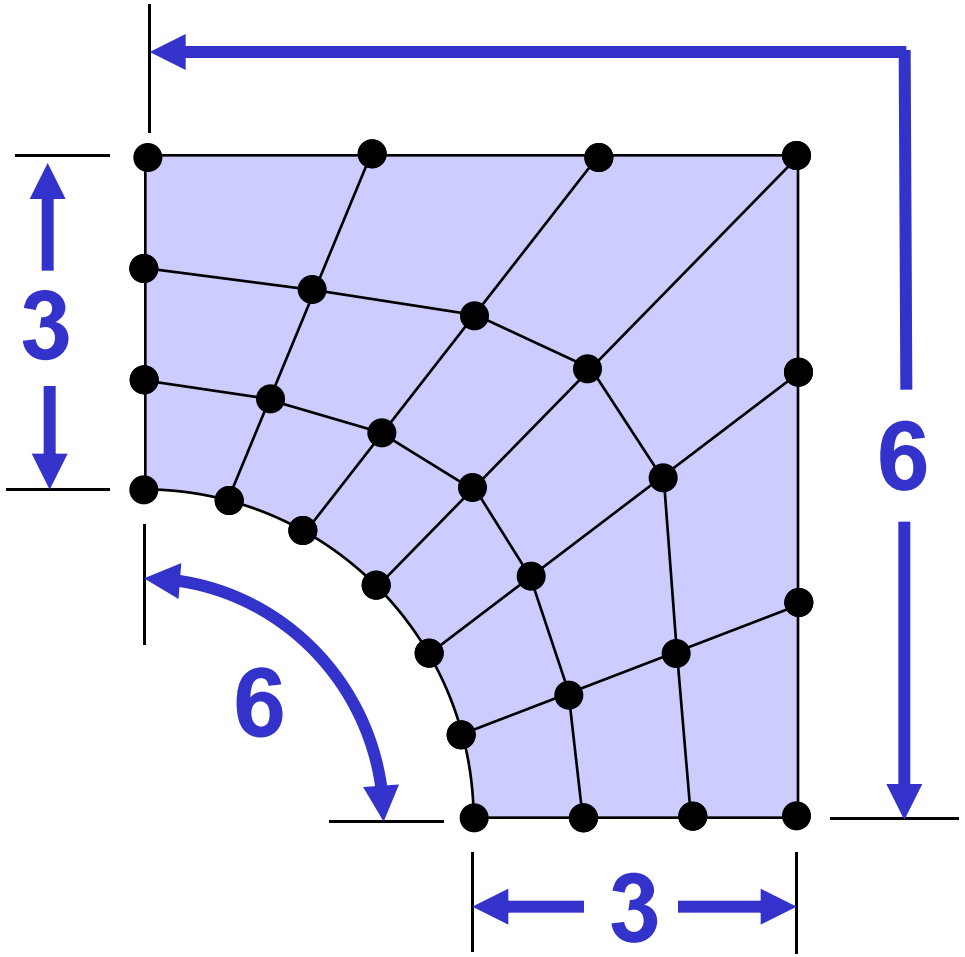




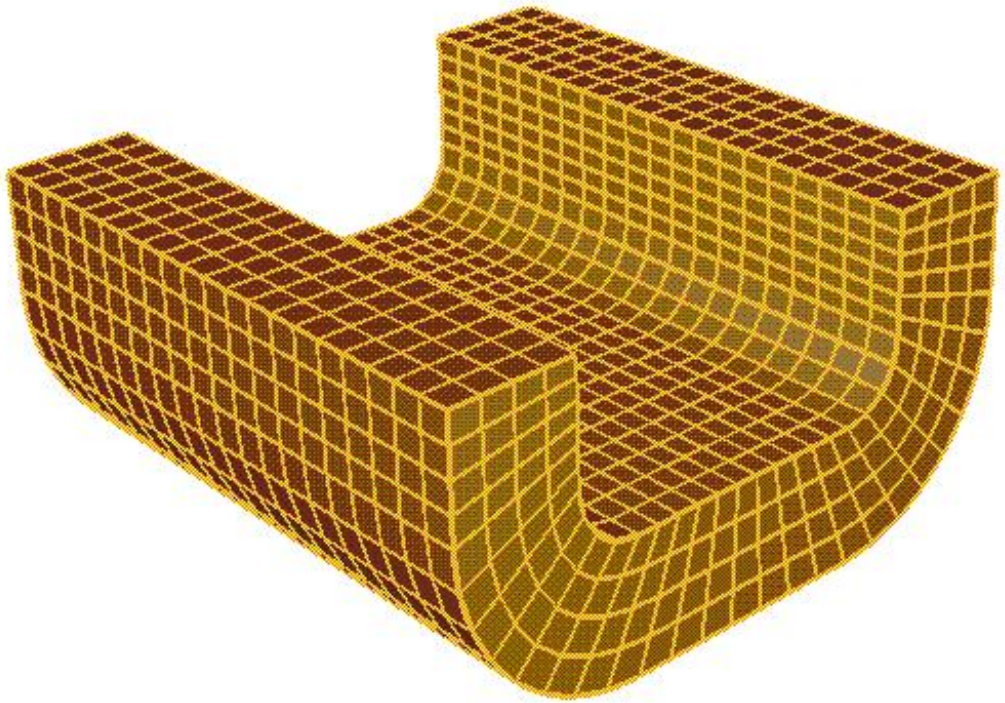




Structured

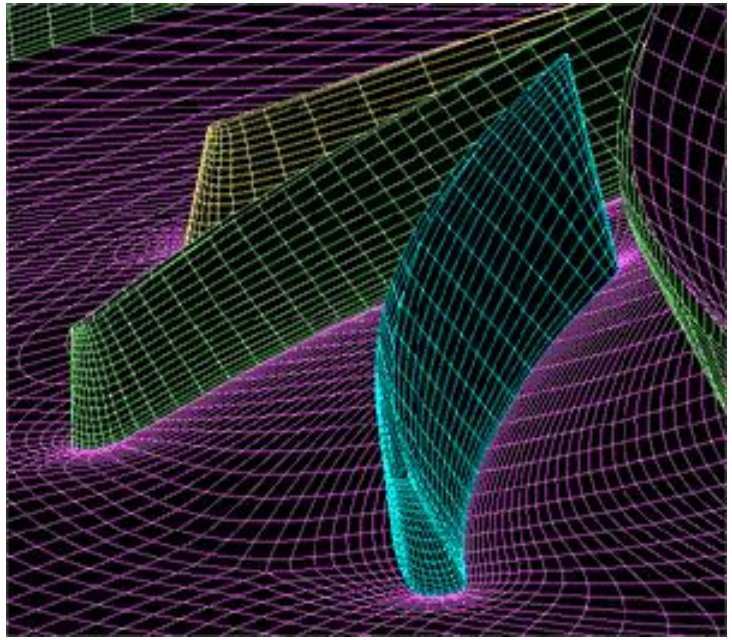


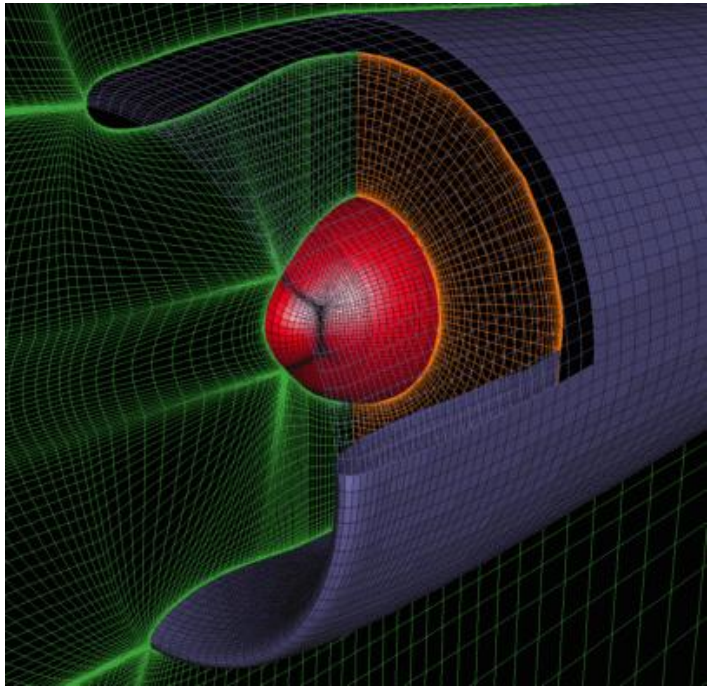
Structured



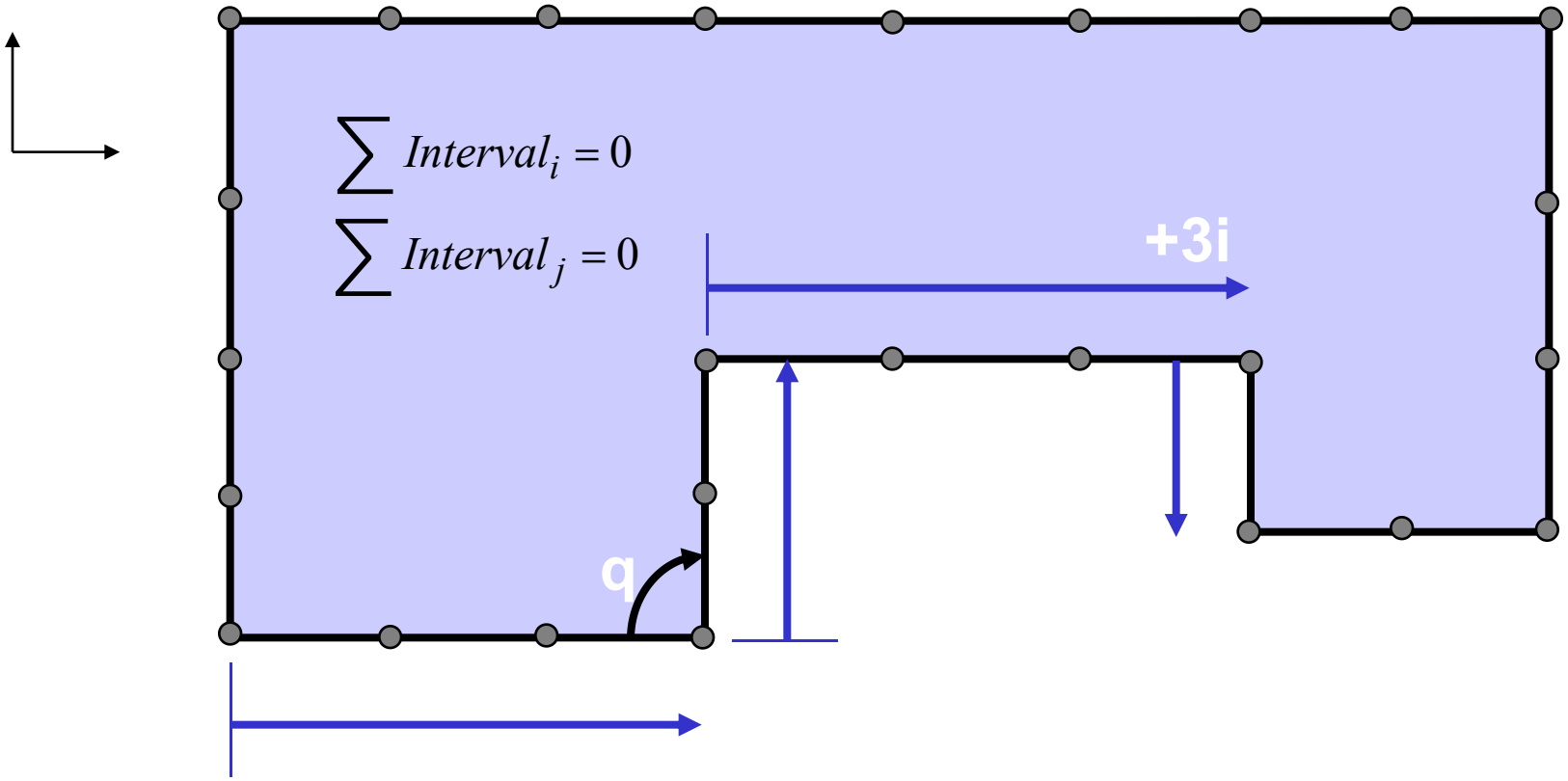
Structured

Block-Structured

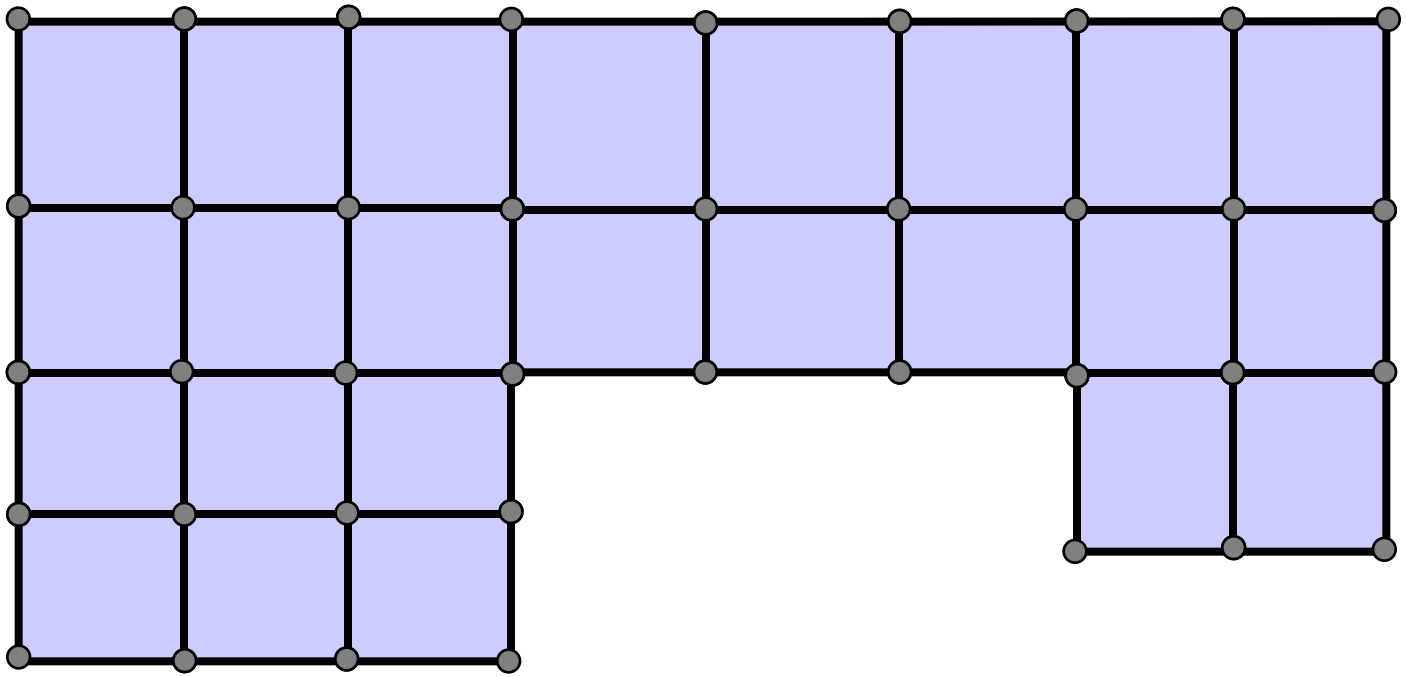




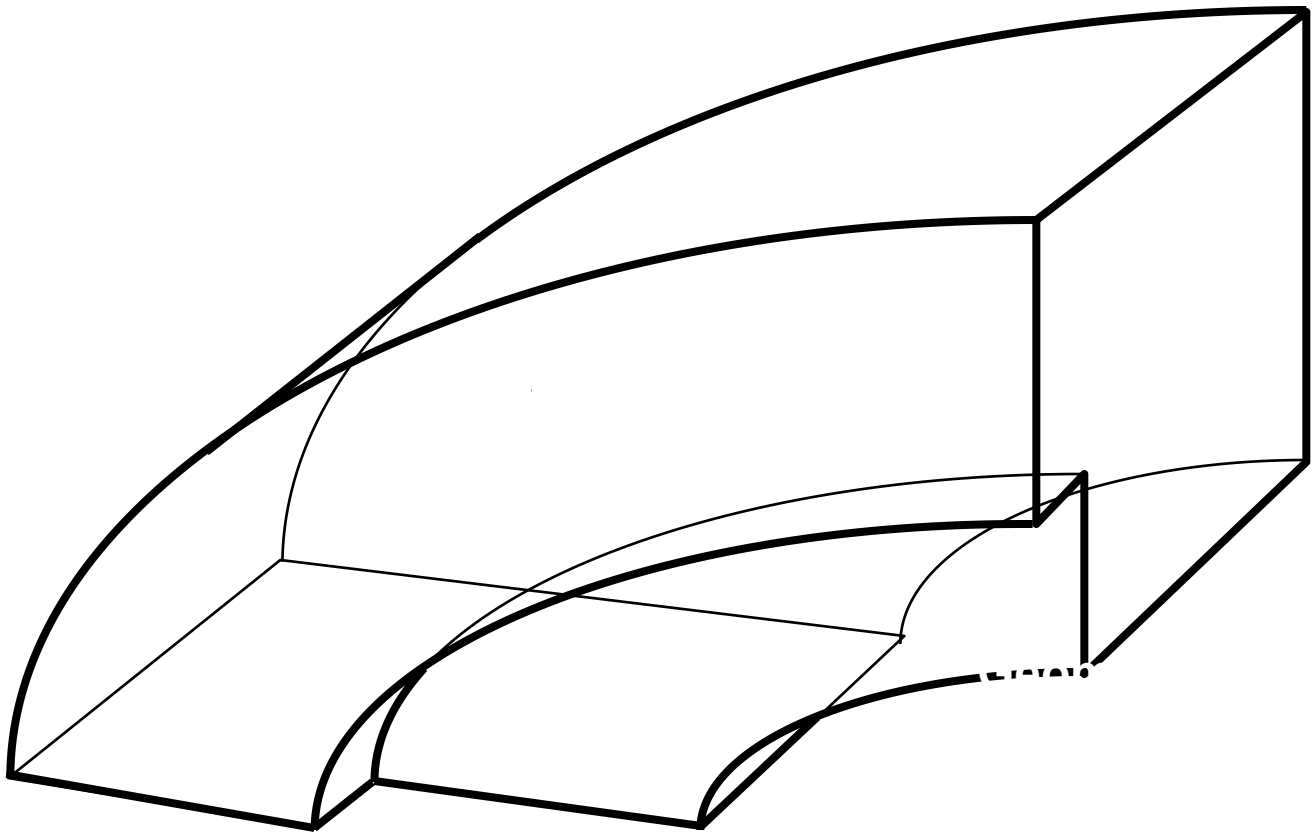
Structured



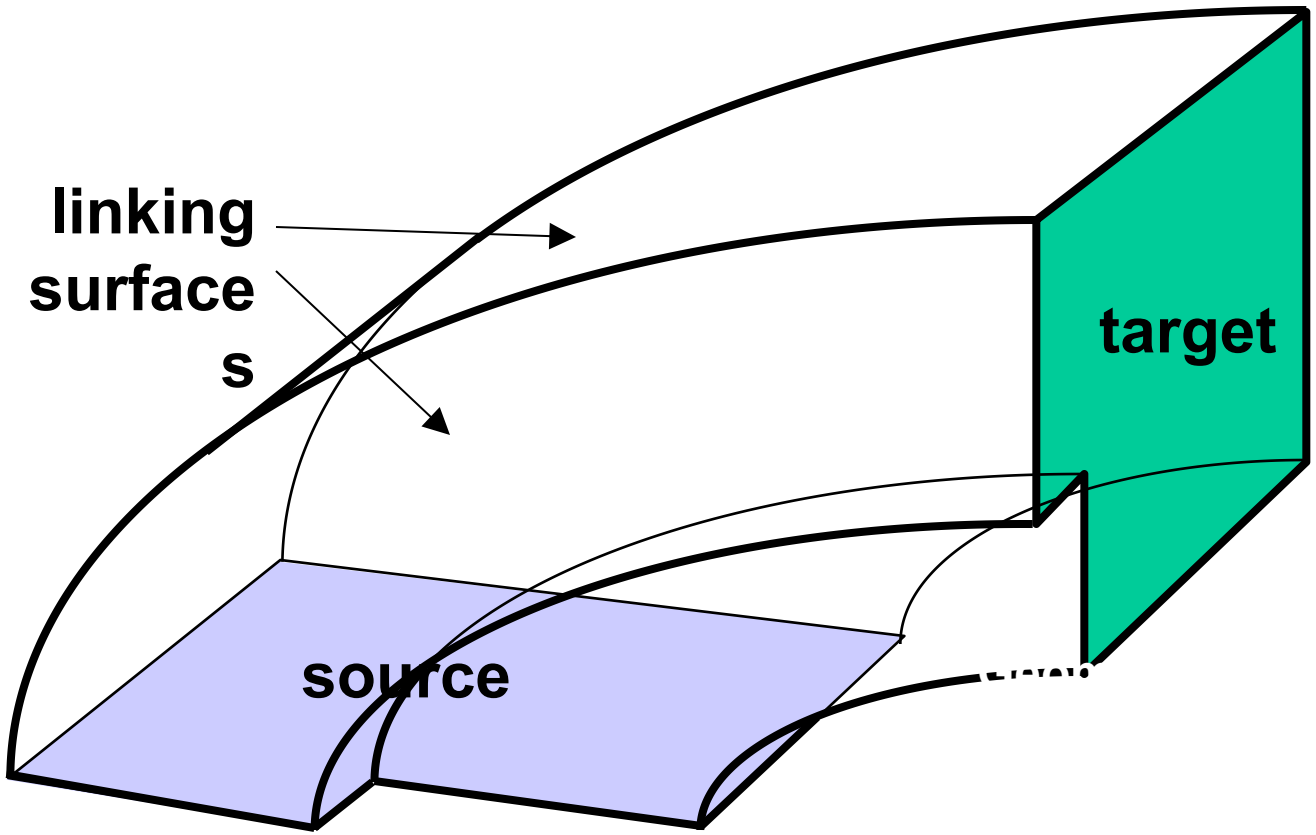
Structured



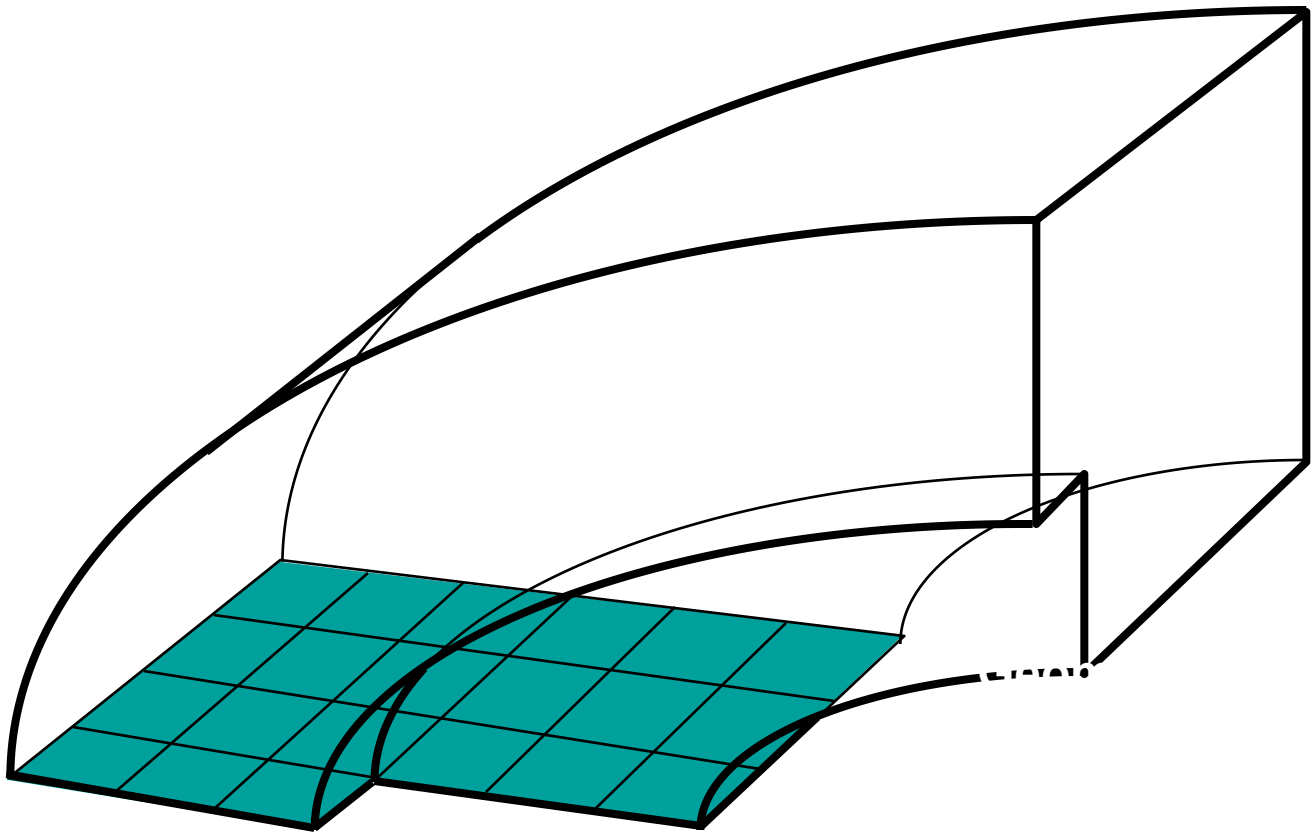
Structured



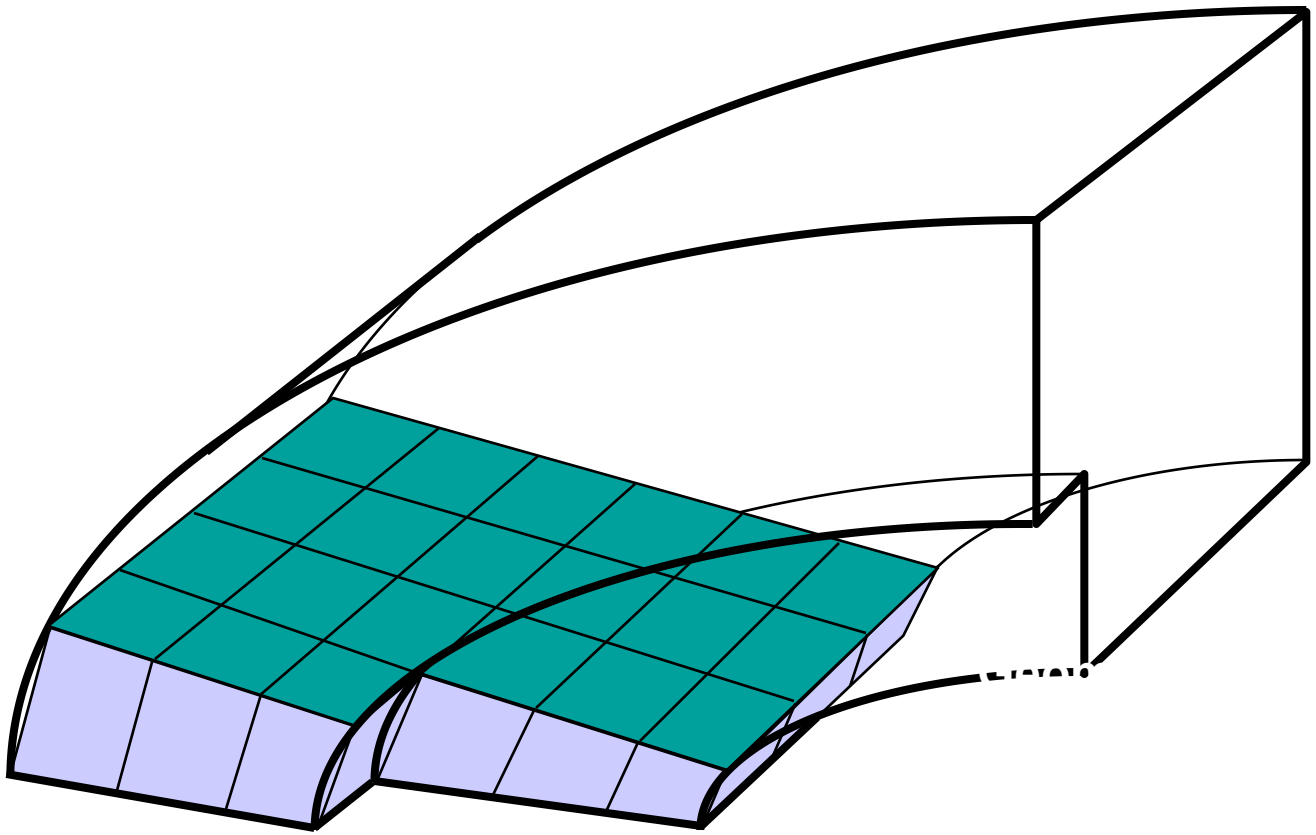
Structured



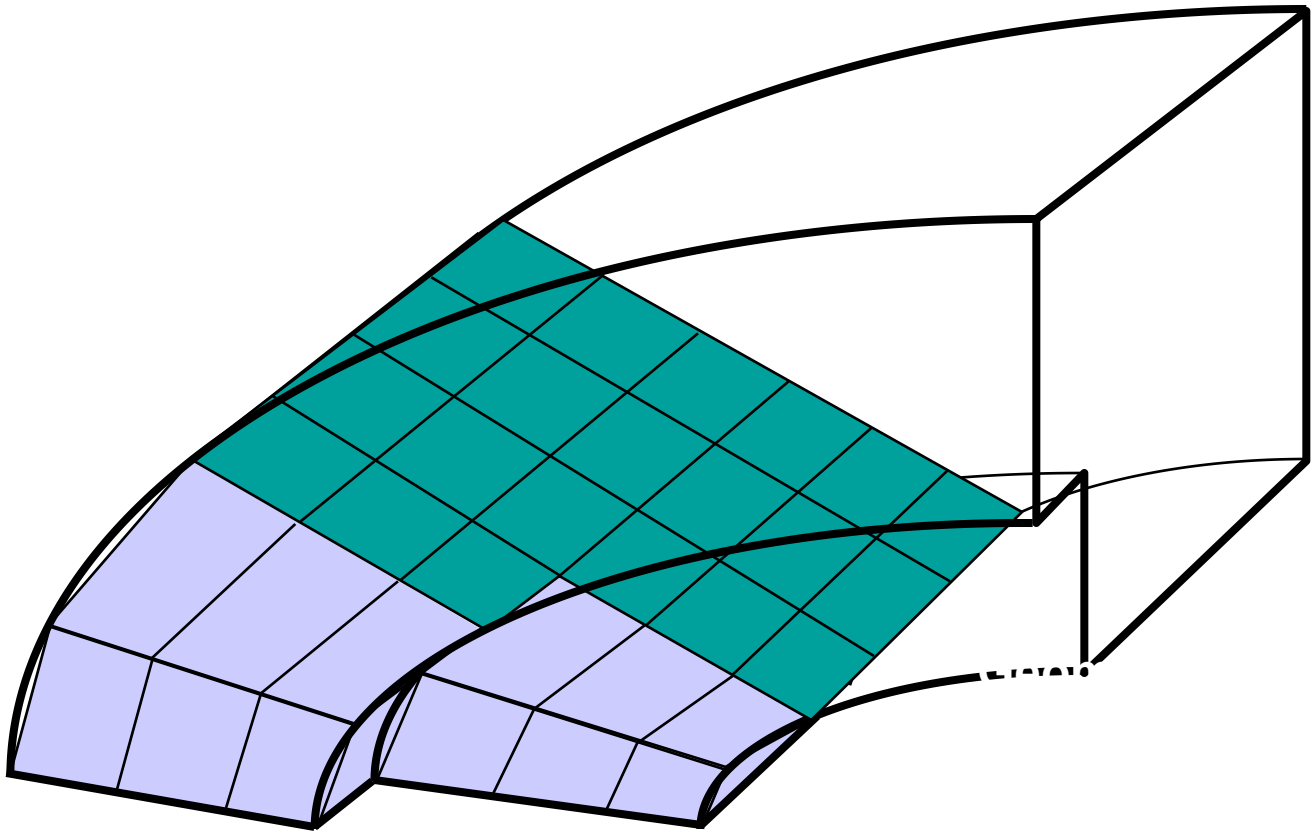
Structured



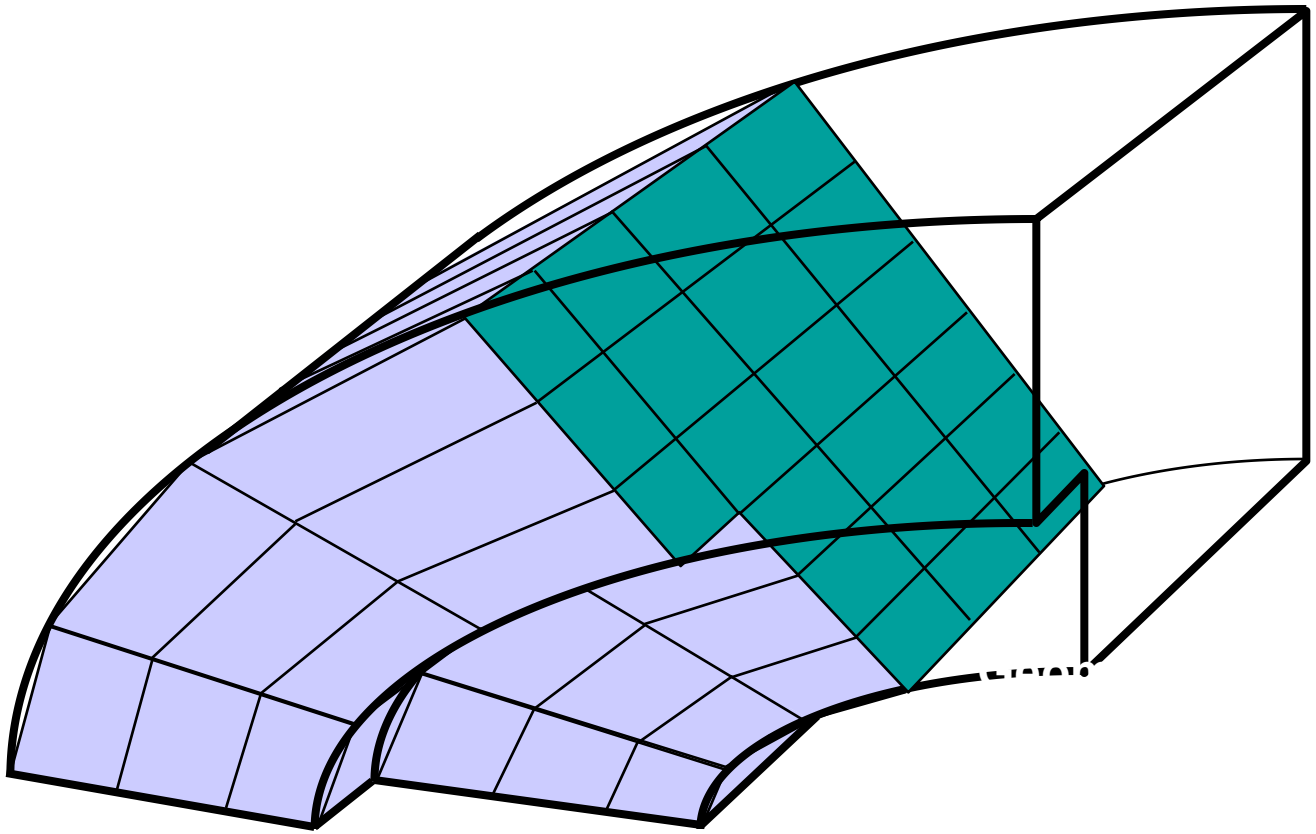
Structured



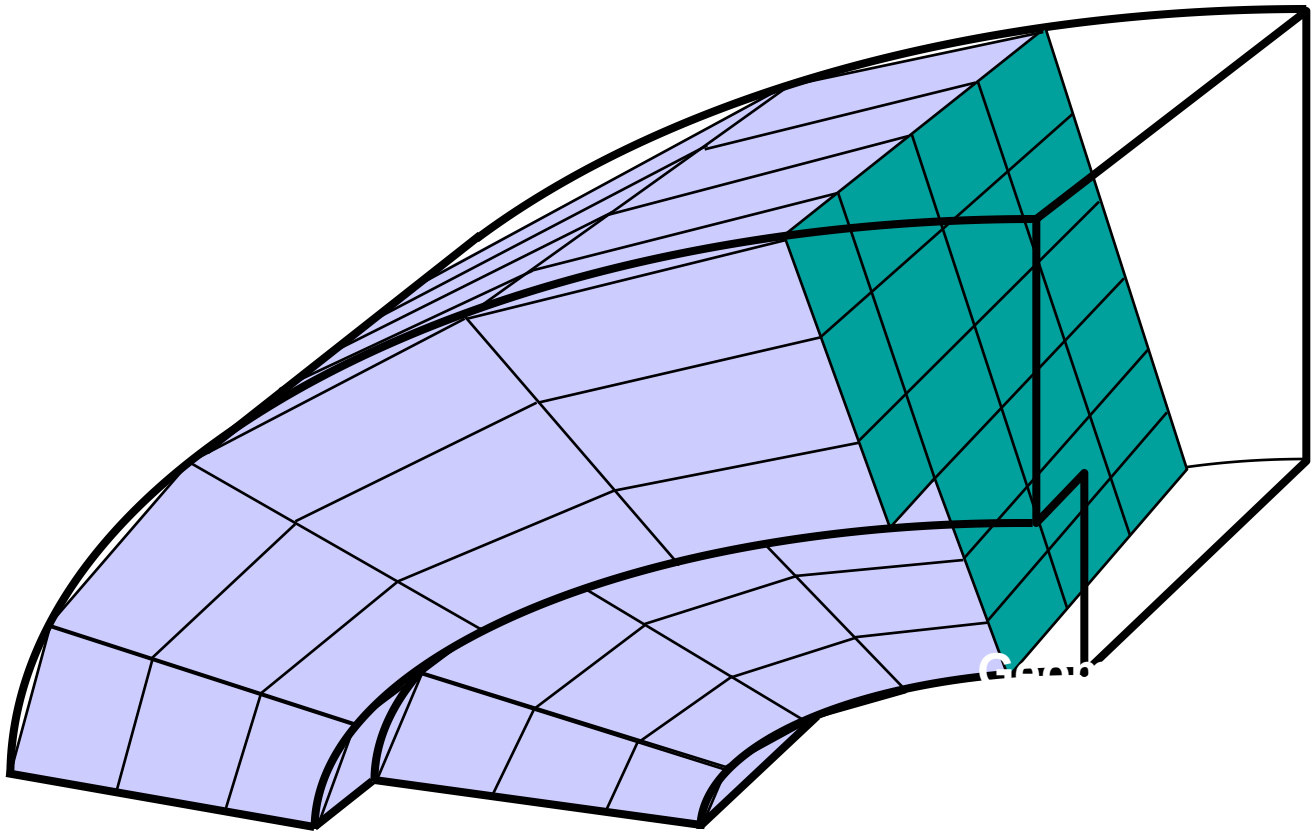
Structured



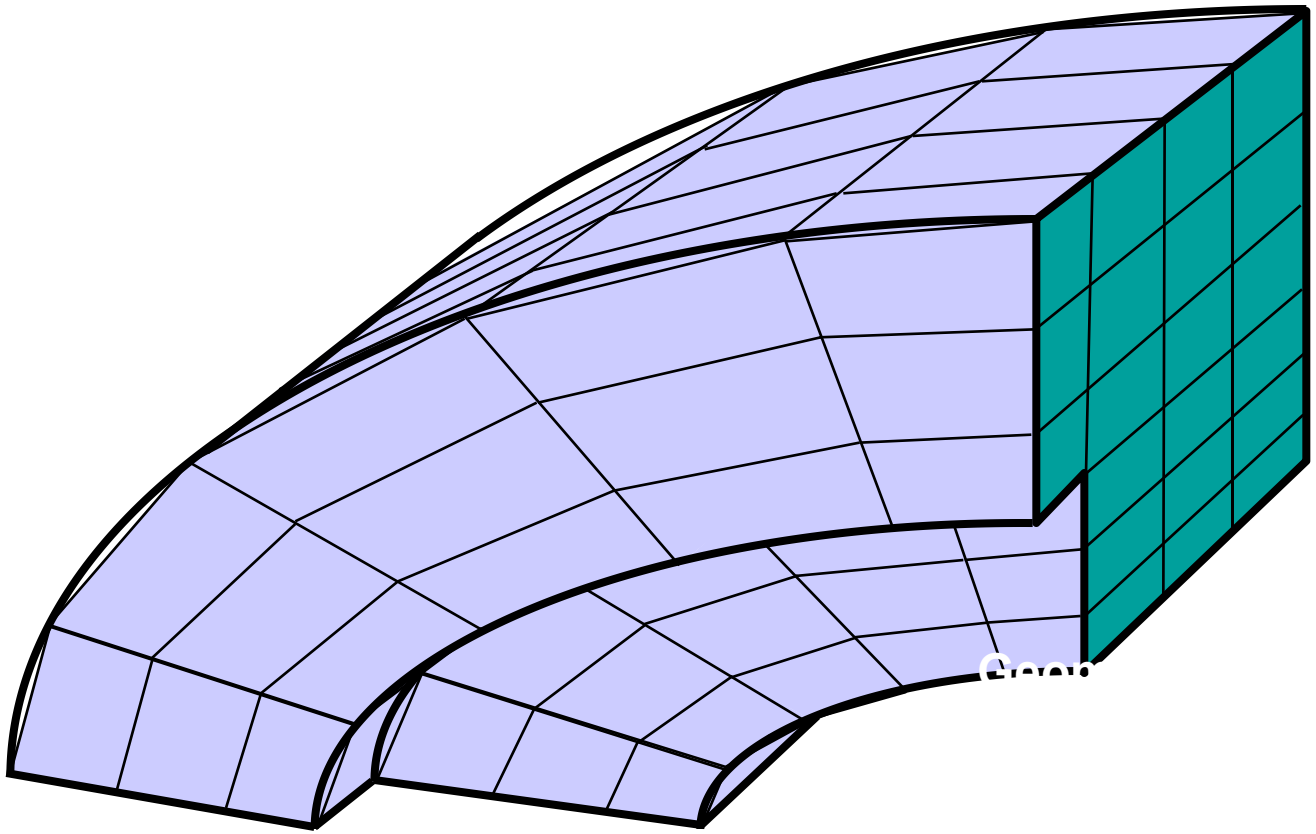
Structured



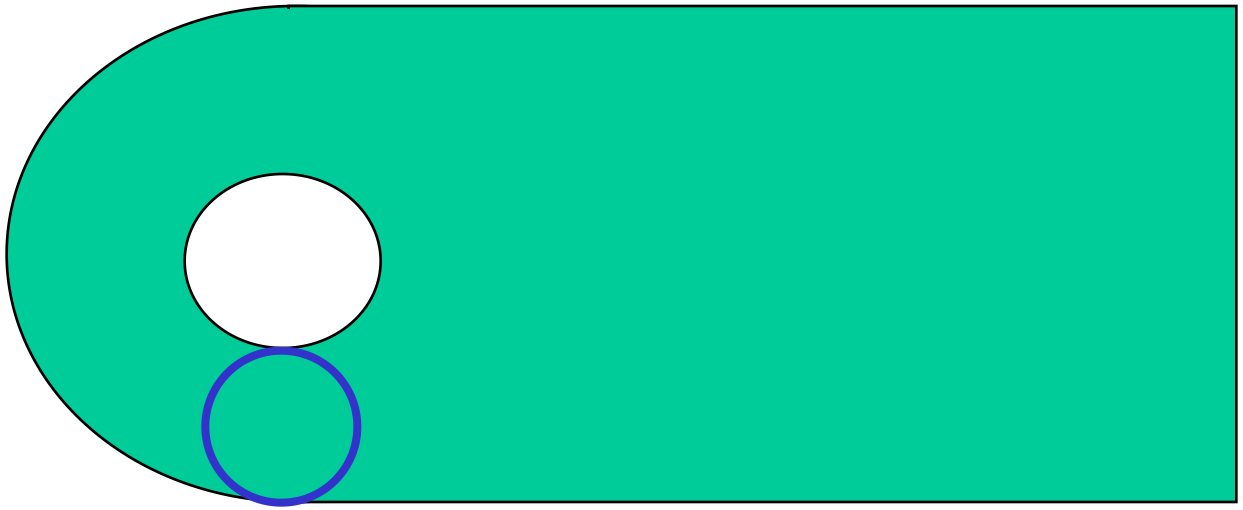
Structured



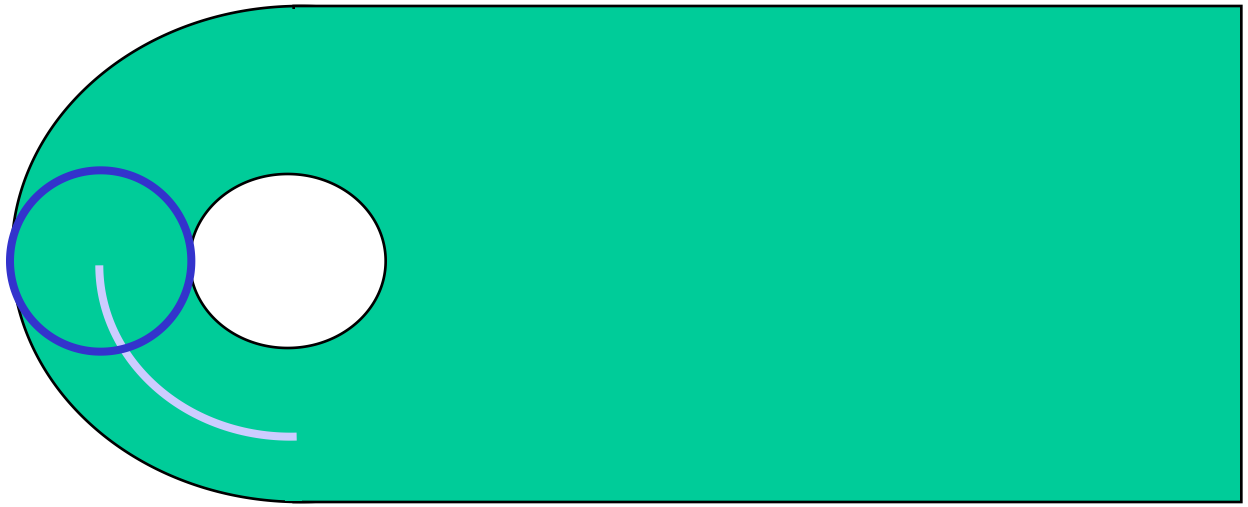
Structured



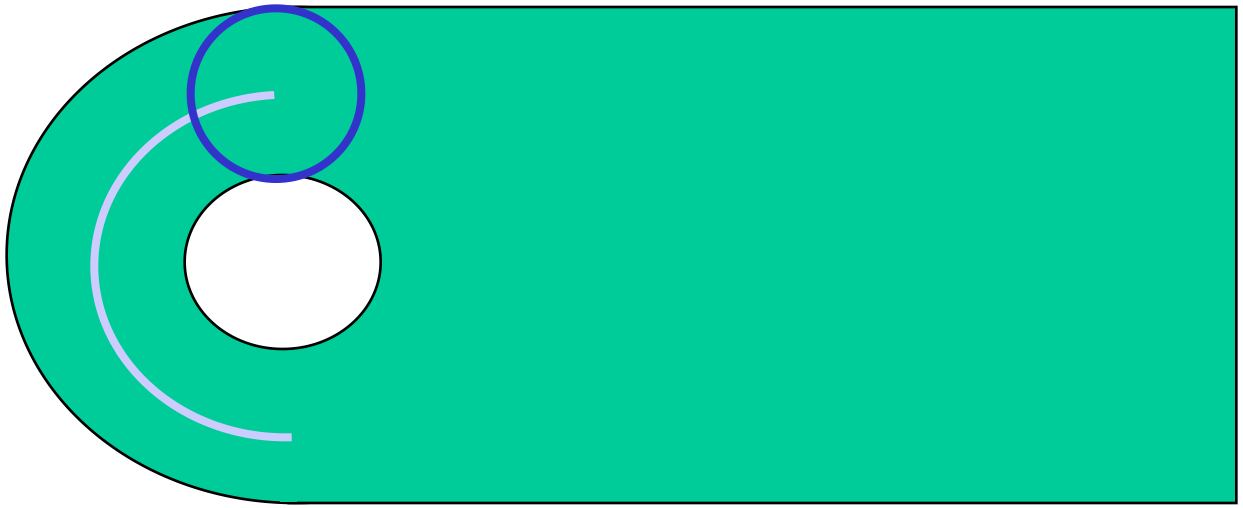
Medial Axis



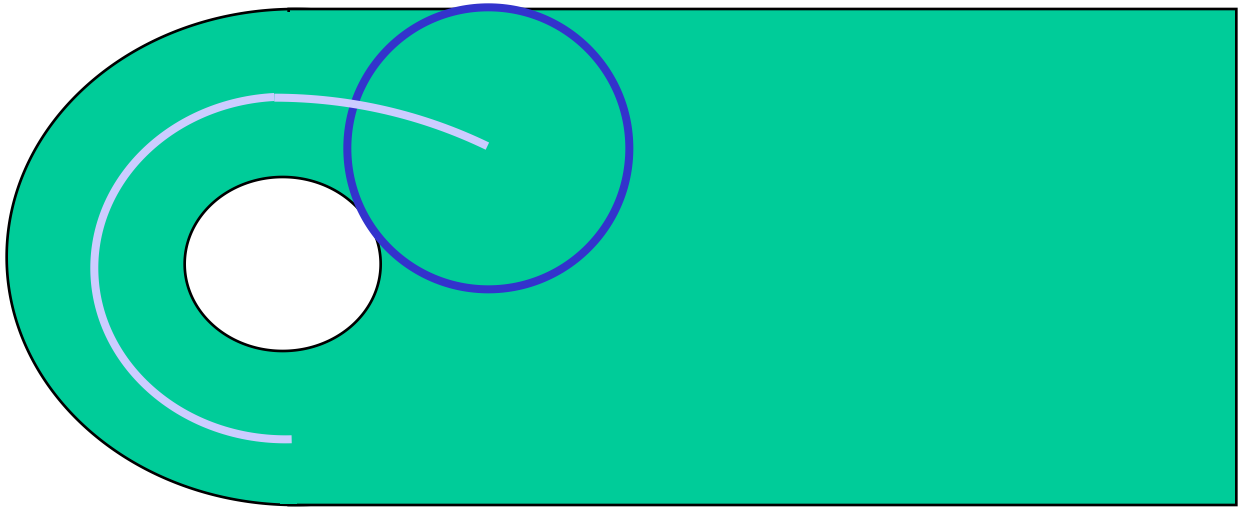
Medial Axis



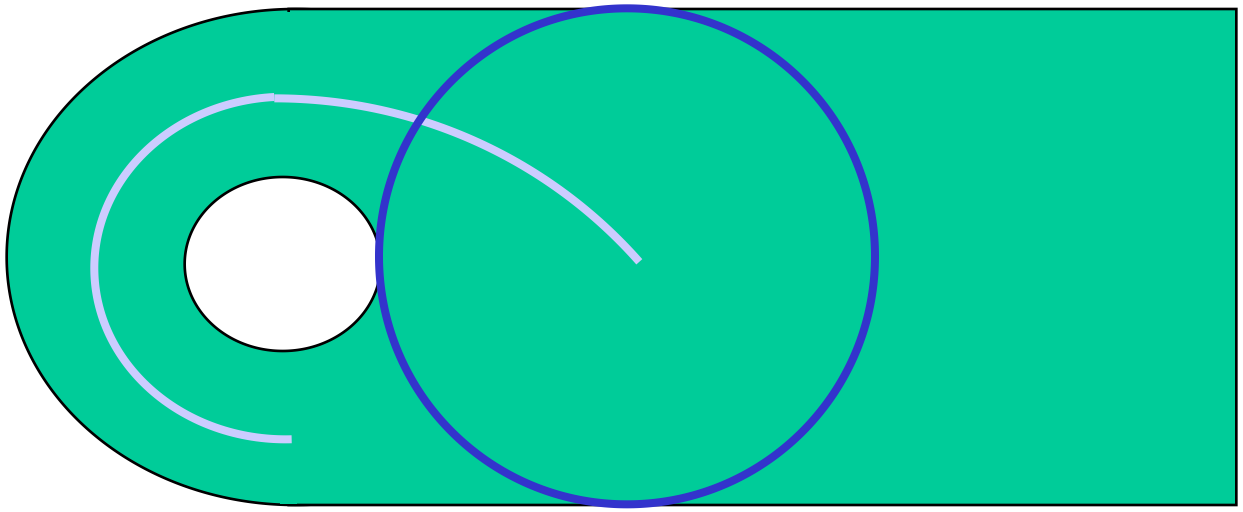
Medial Axis



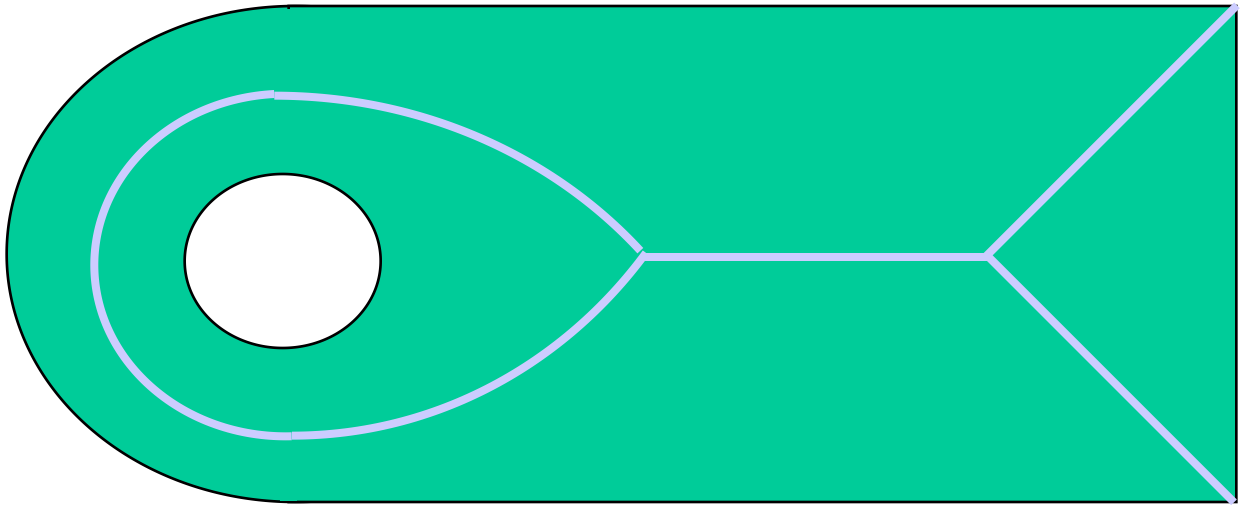
Medial Axis



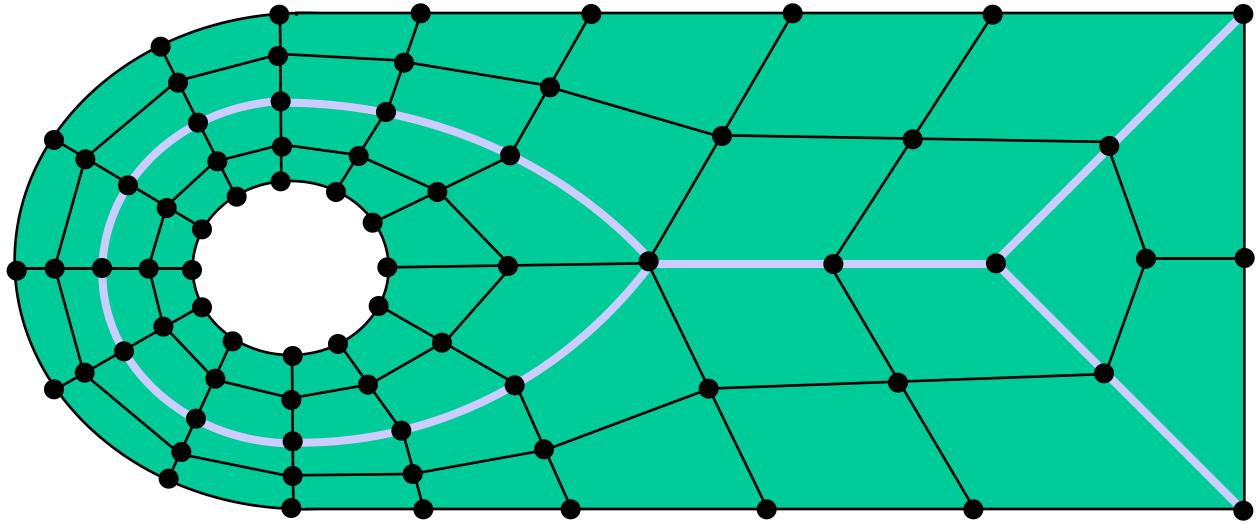
Medial Axis



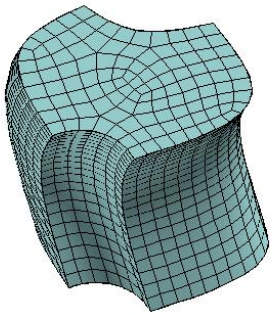
Medial Axis

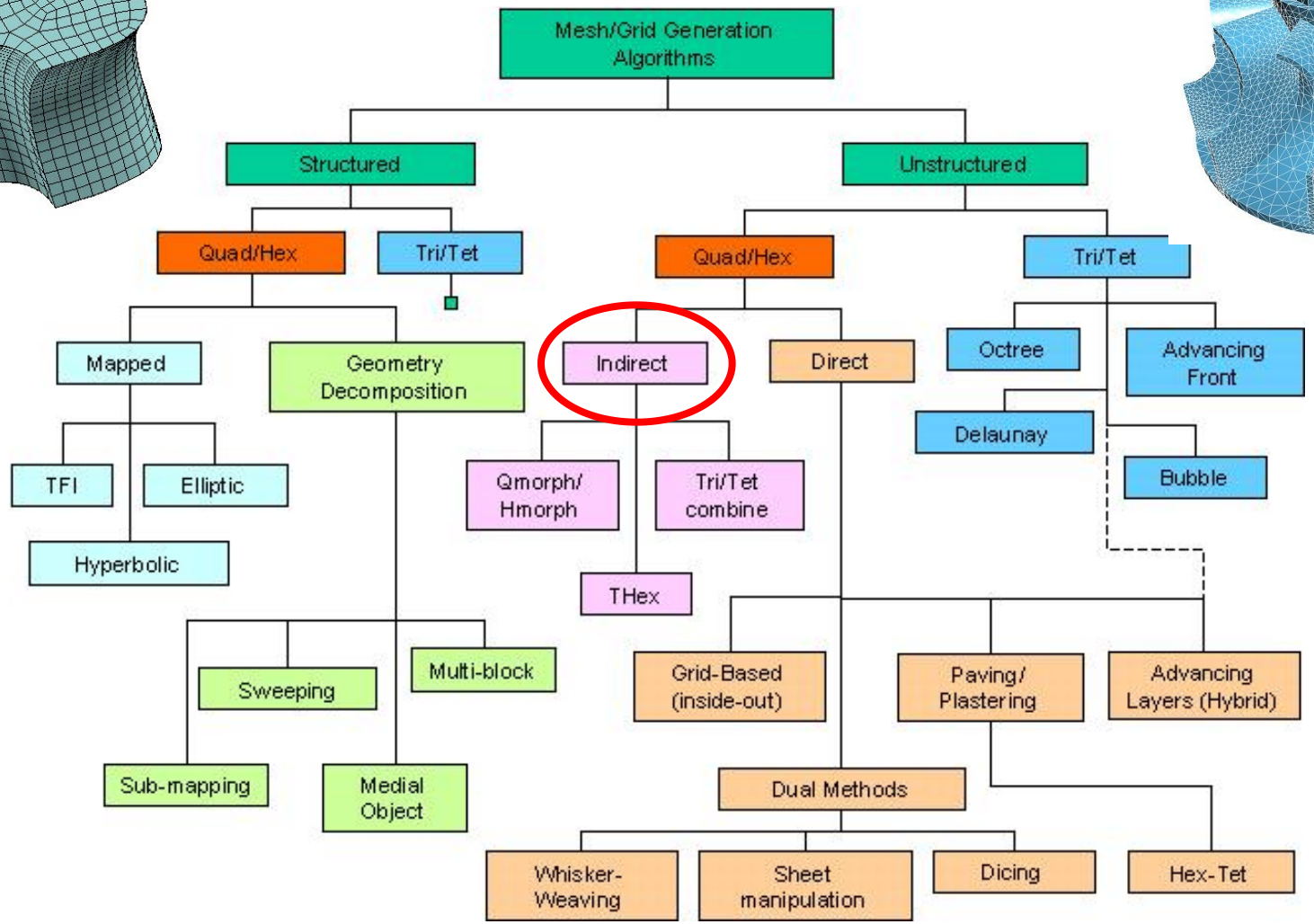


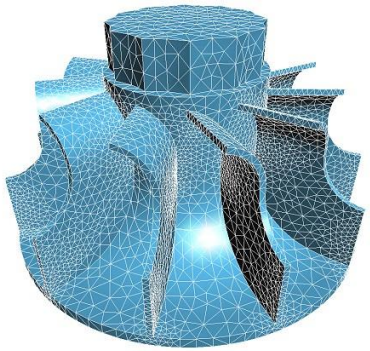
Medial Axis



Meshing Algorithms

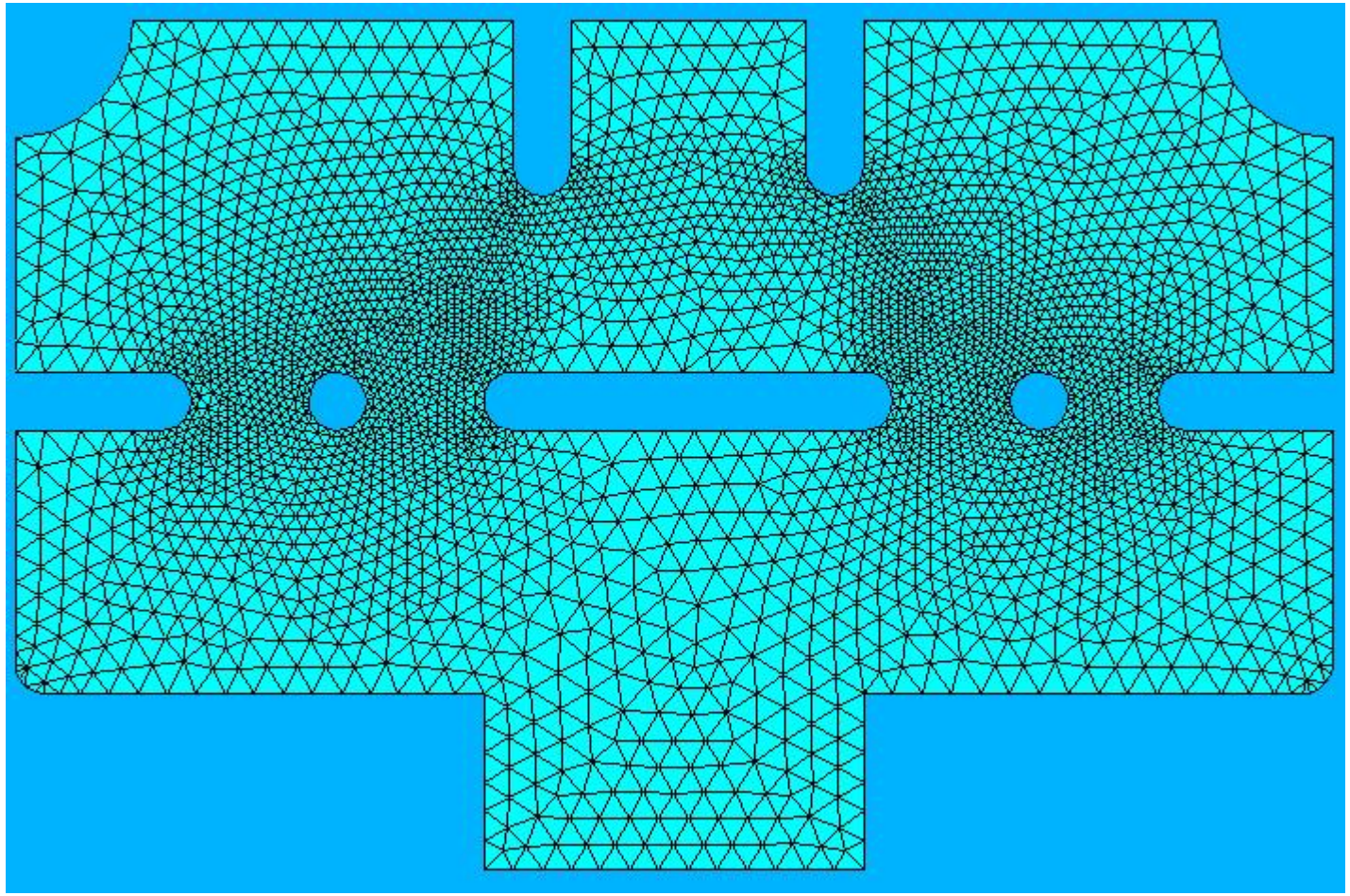






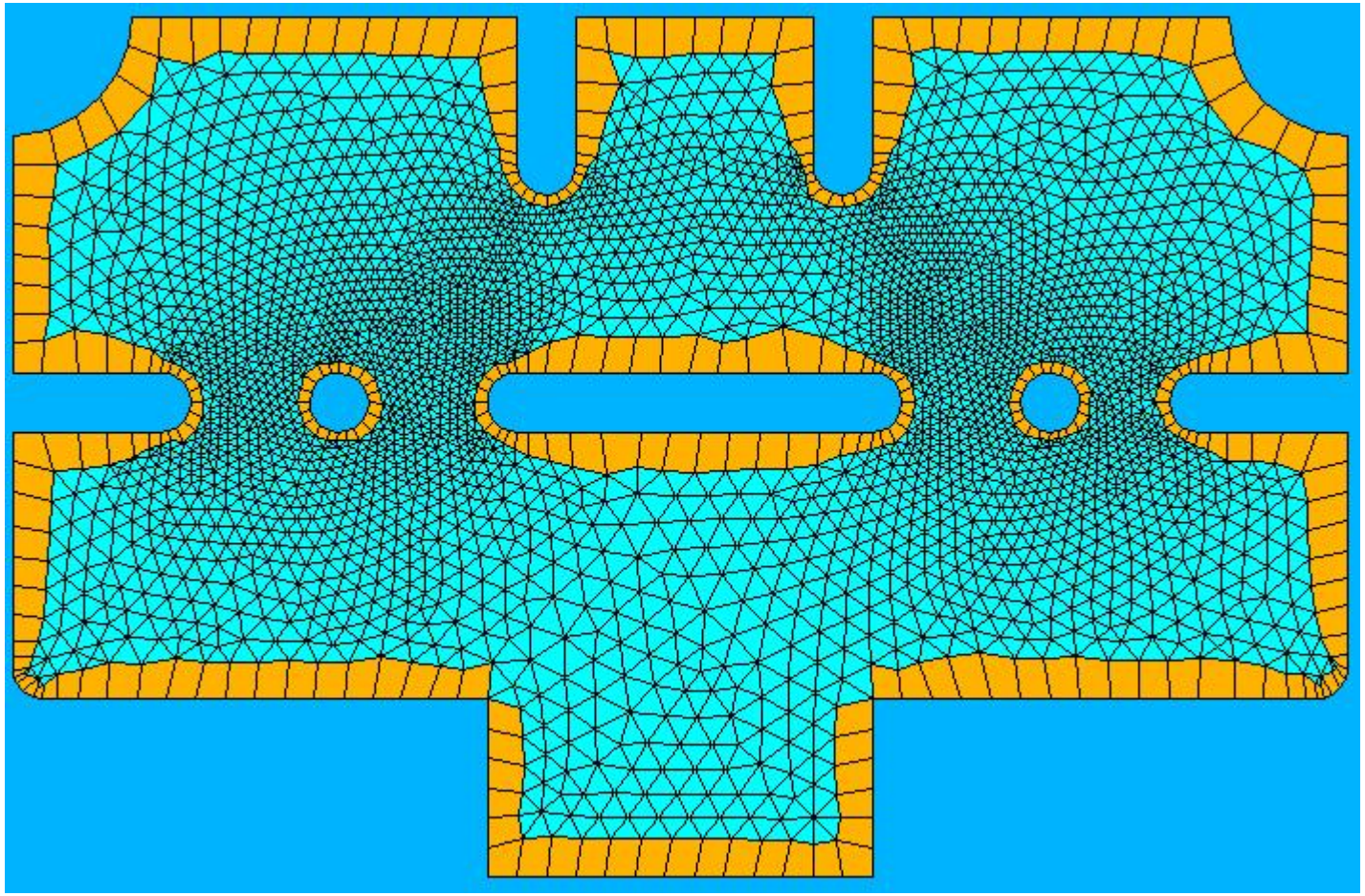
Unstructured-Quad

Q-Morph



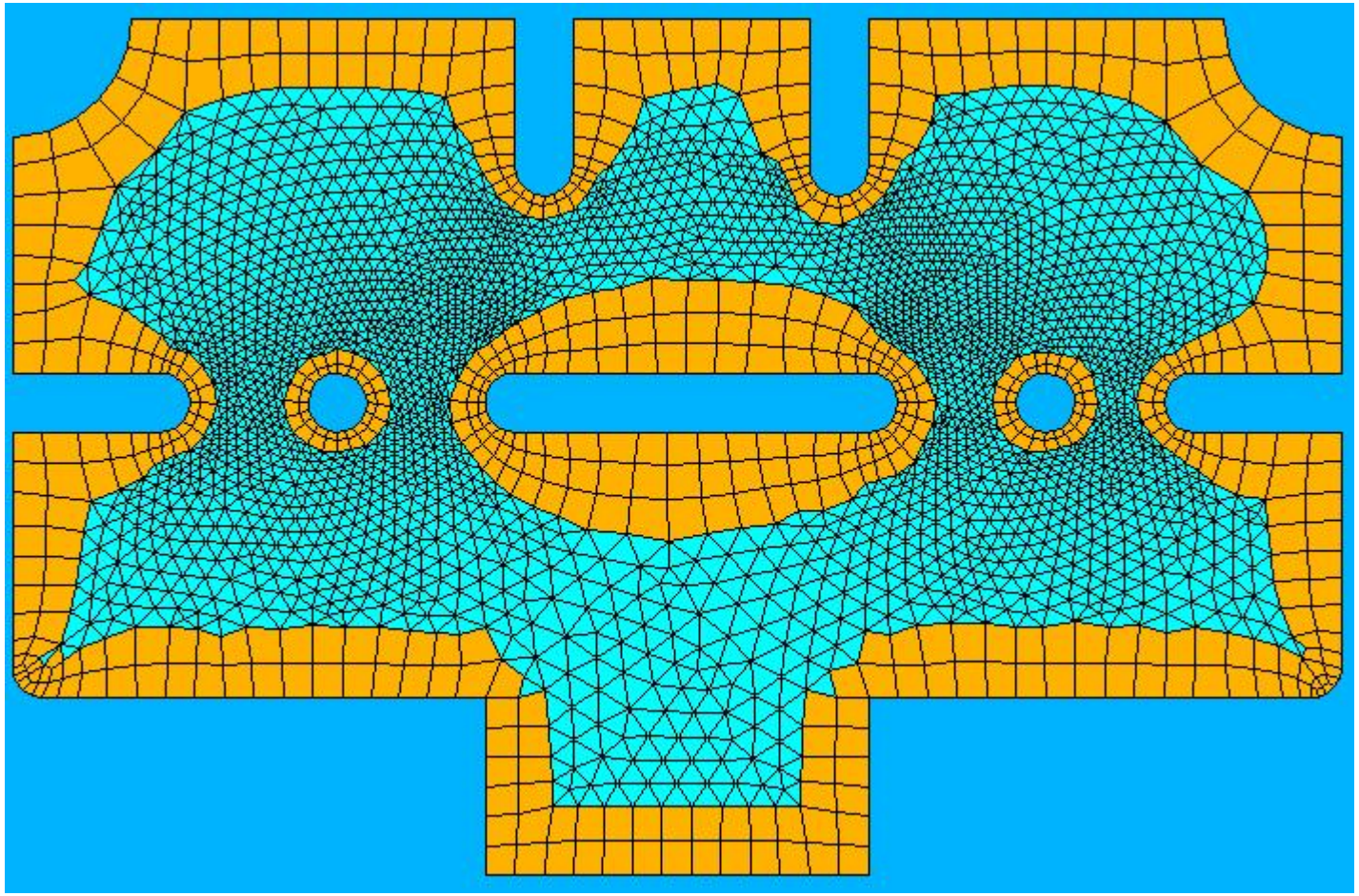
Unstructured-Quad

Q-Morph

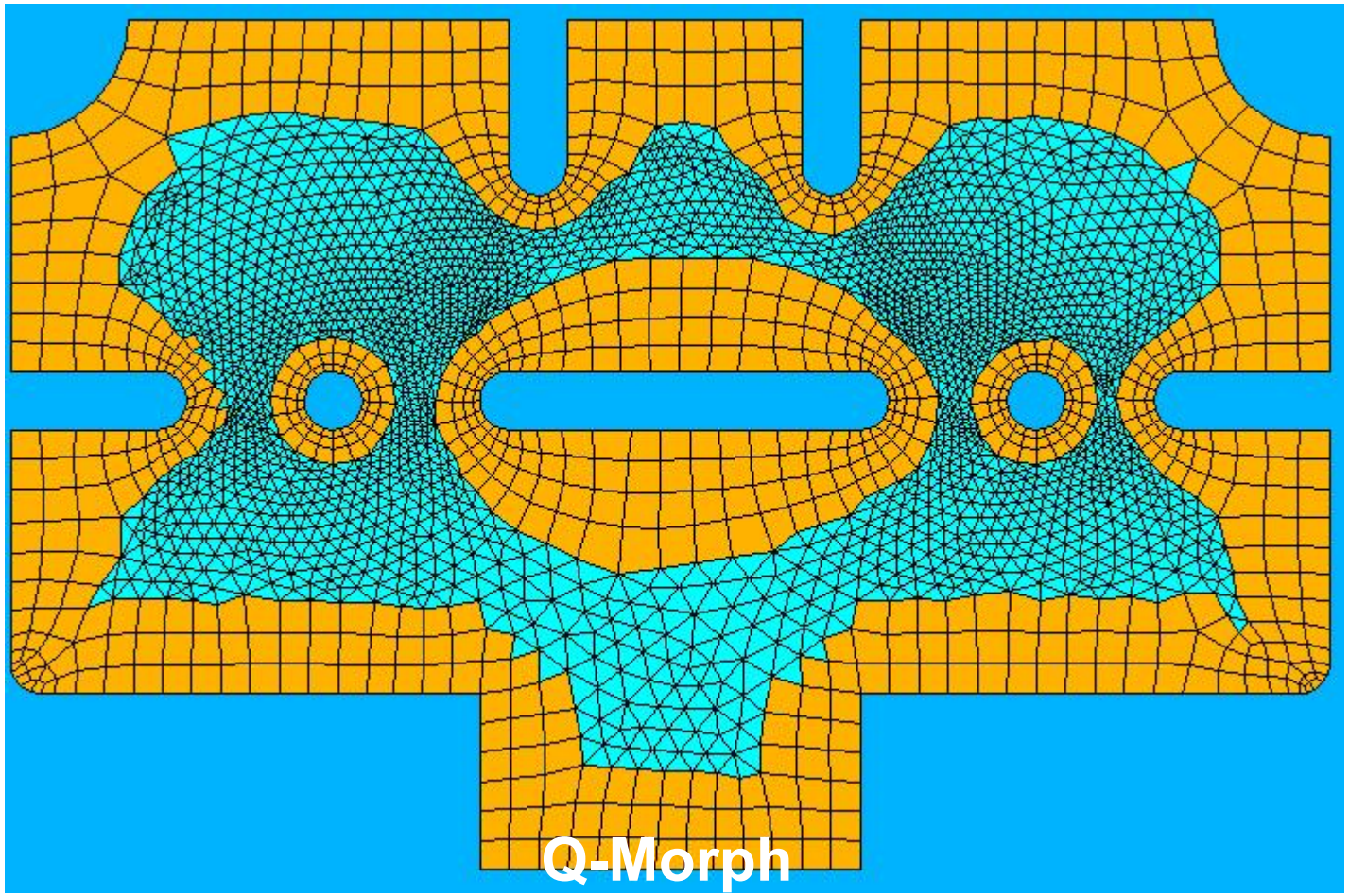


Unstructured-Quad

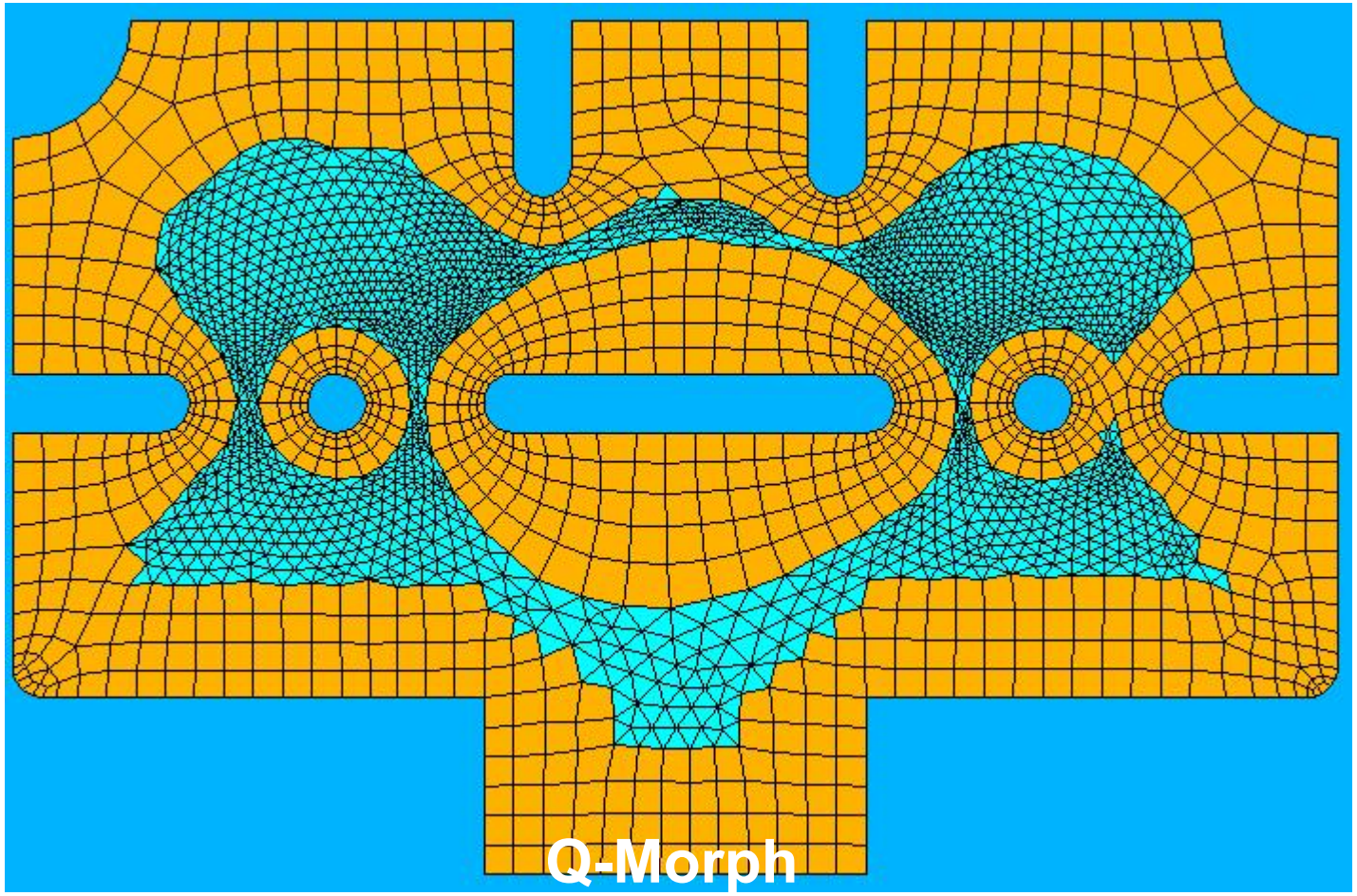
Q-Morph



Unstructured-Quad

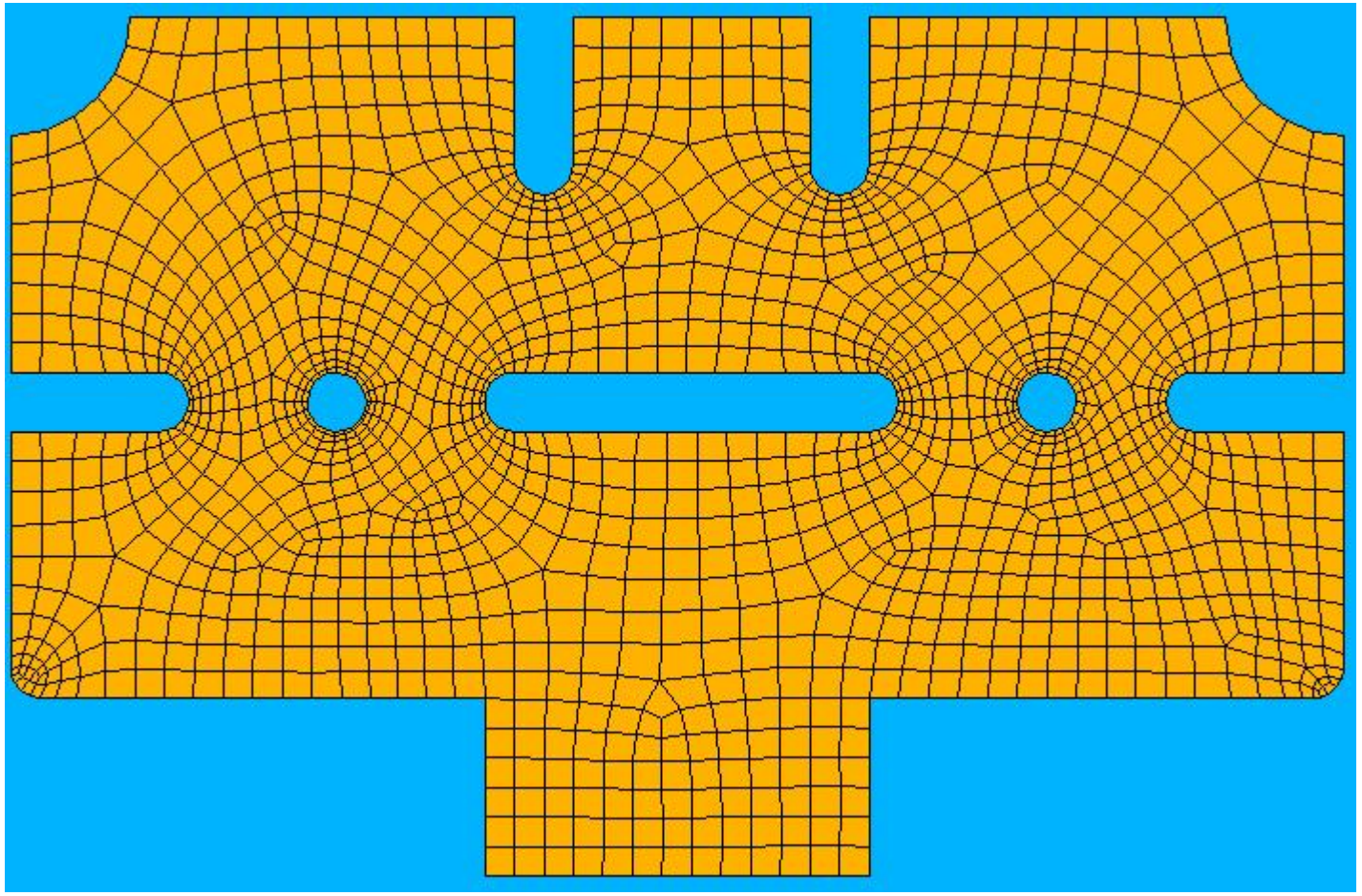


Unstructured-Quad

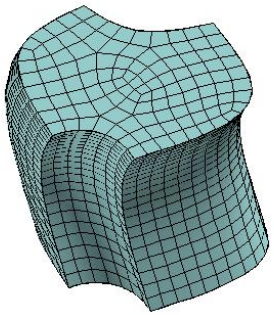


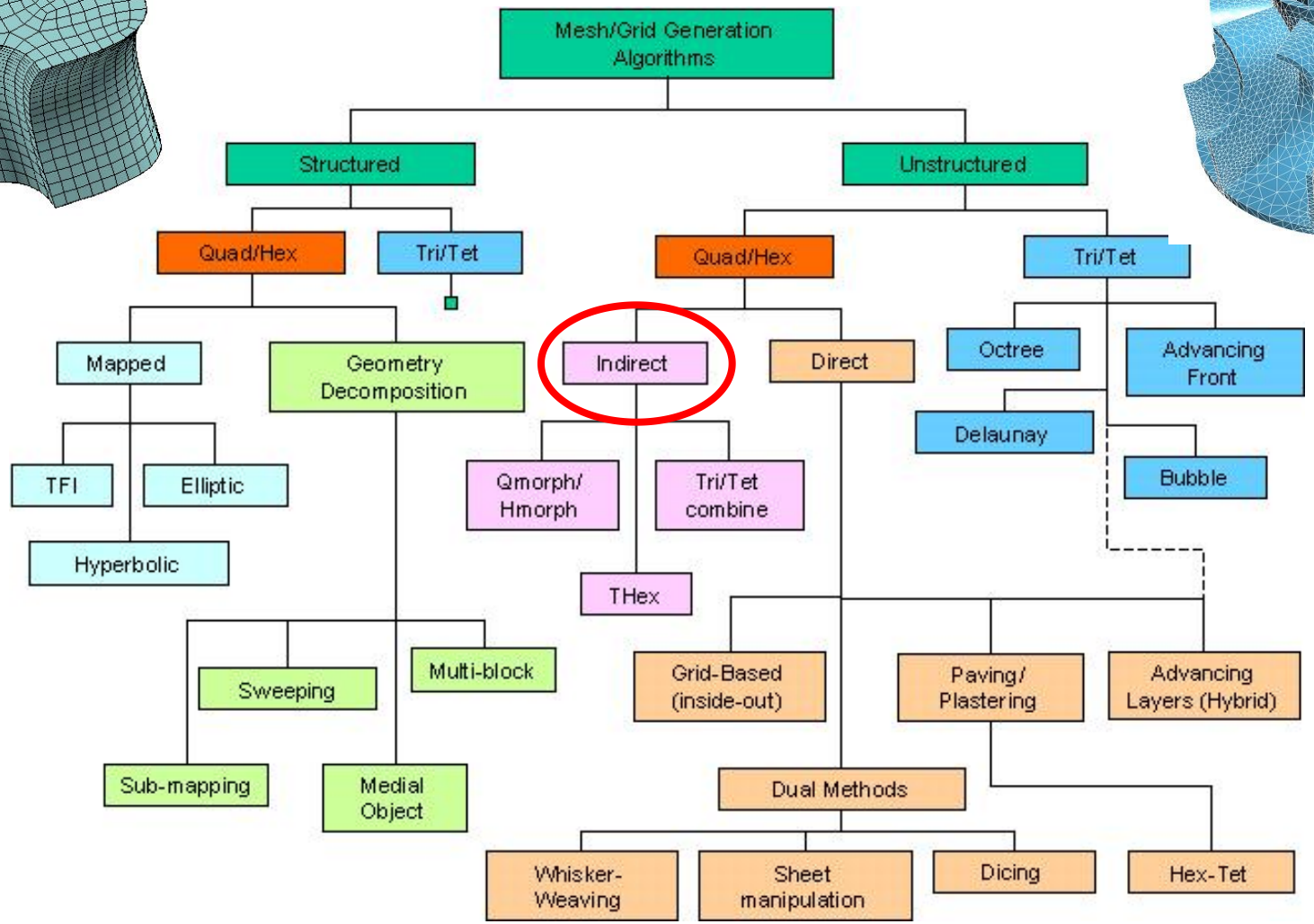
Unstructured-Quad

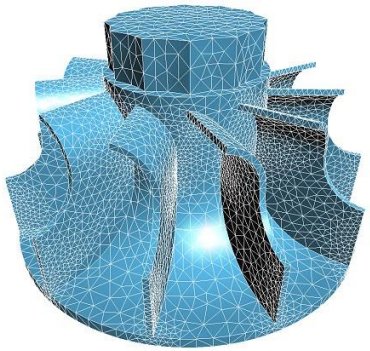
Q-Morph



Meshing Algorithms





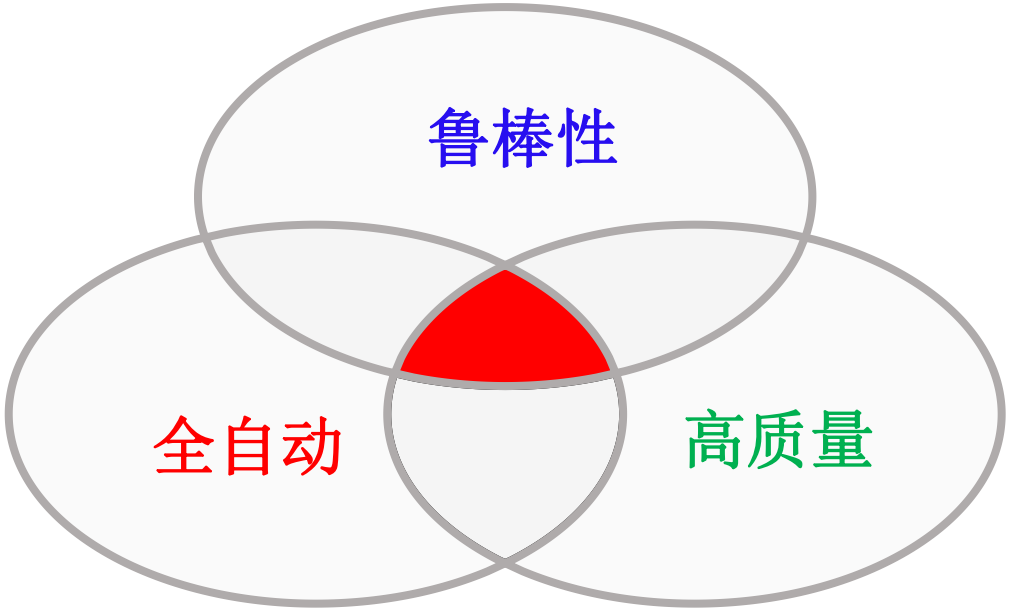


结构网格生成的“金标准”

- 全自动
- 鲁棒性好
- 网格质量高
- 保持边界CAD几何
- .....

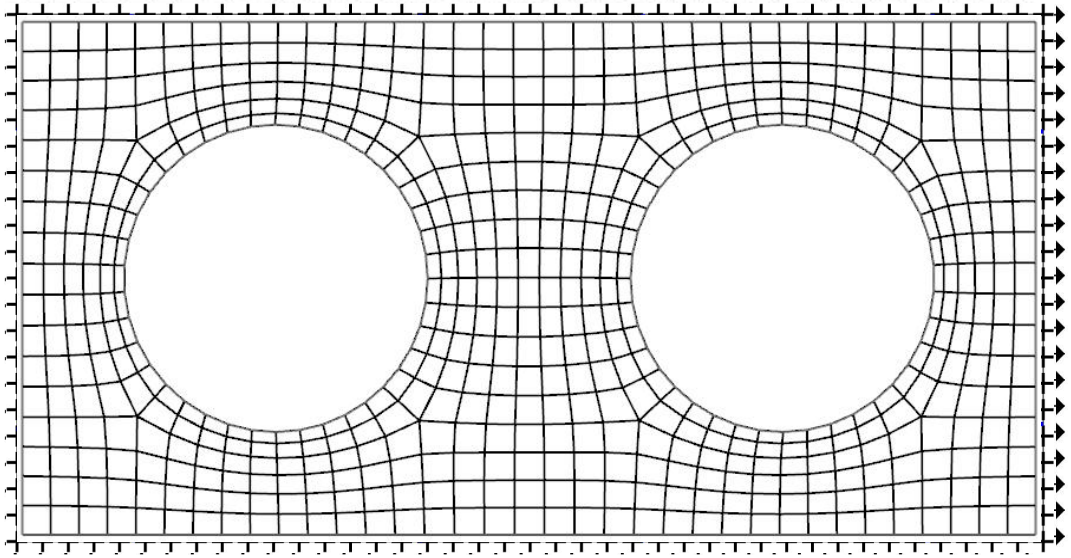
区域剖分是关键！ → 标架场引导的区域剖分

→ 高阶网格



基于标架场的二维区域全自动四边形网格生成框架

- **主要思想**：求解拉普拉斯型控制方程，获取一个反映模型边界几何特征、覆盖整个问题域的矢量场. 继而结合矢量与标架的映射关系, 将计算得到的矢量场转化为标架场. 最后通过分析标架场的奇异结构将问题域分解成多个四边子区域, 并在每个子区域利用映射法生成高质量的结构四边形网格。



基于标架场的二维区域全自动四边形网格生成

- **控制方程**

➢ 以区域边界 ∂Ω 上矢量向区域 Ω 内推进时满足最小变化为目标，可利用拉普拉斯方程定义内部区域光滑矢量场 $\boldsymbol{u}$，

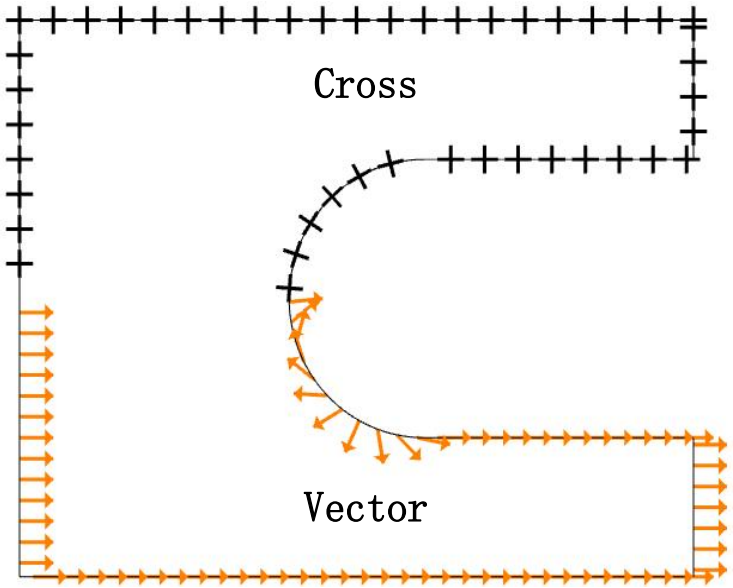
$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{u}_i(p) = 0 & p \in \Omega \\ \boldsymbol{u}_i(p) = \boldsymbol{u}_{i,0}(p) & p \in \partial\Omega_D \quad (i = x, \\ \partial \boldsymbol{u}_i(p)/\partial \mathbf{n} = \dot{u}_{i,0}(p) & p \in \partial\Omega_N \end{cases}$$

分别在 $\partial\Omega_D$ 与 $\partial\Omega_N$ 上应用狄利克雷边界条件与诺依曼边界条件

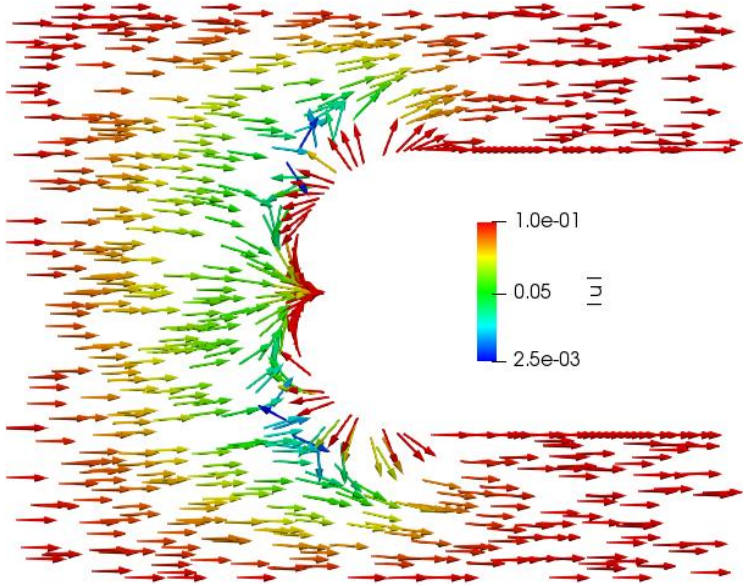
基于标架场的二维区域全自动四边形网格生成

- **边界条件的设置以及矢量场与标架场的解**

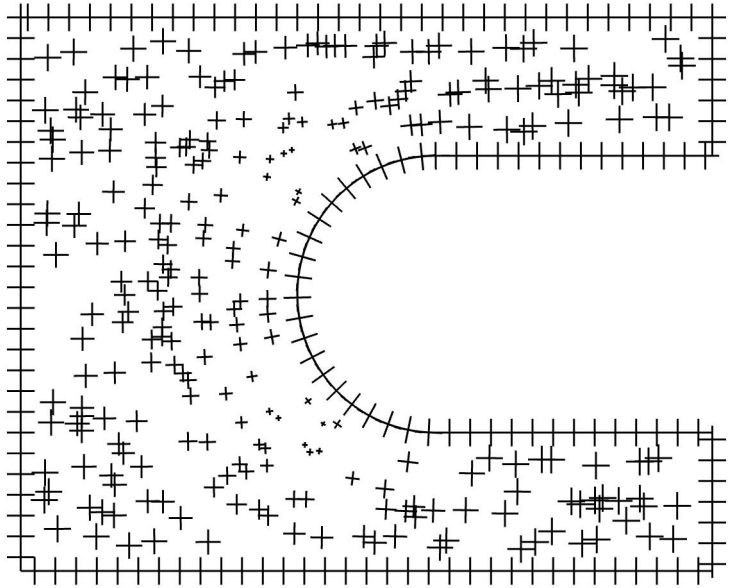
➢ 在边界上设置狄利克雷边界条件，在边界上的每个初始标架设置为一个方向对齐边界切线方向，同时另一个方向与边界垂直。



初始场



矢量场



标架场

基于标架场的二维区域全自动四边形网格生成

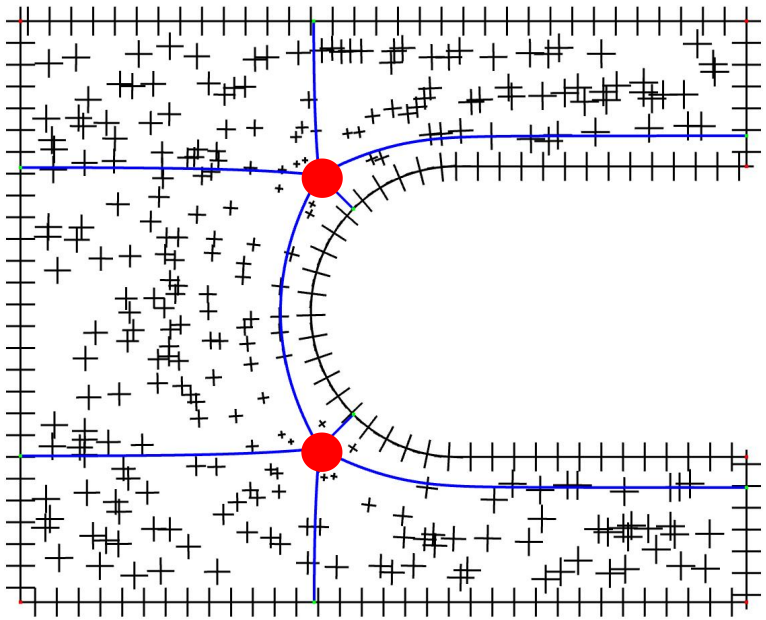
- **通过分析标架场进行区域分解**

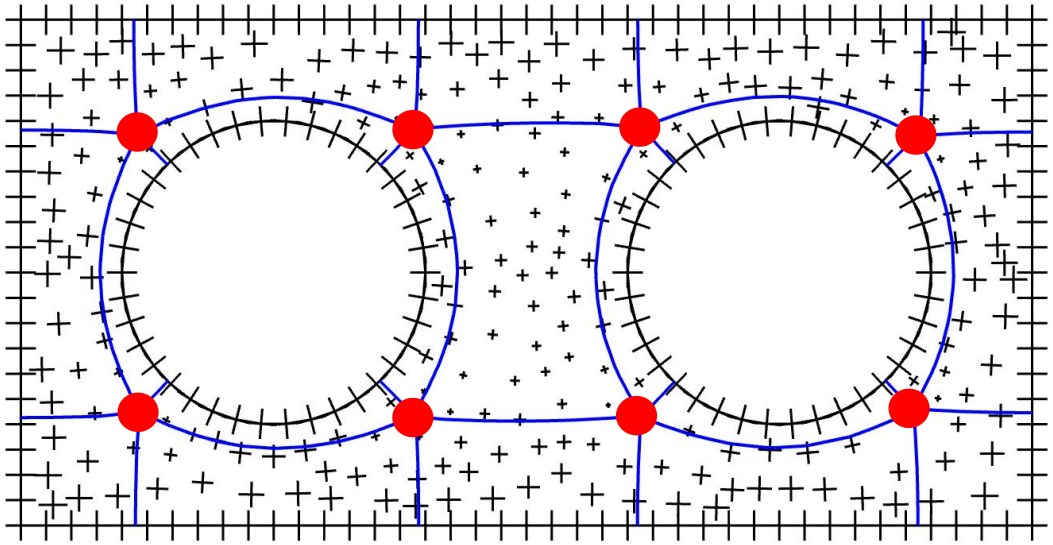
➢ **流线**: $\gamma(s)$ 为标架场 $v_i\,(i=1,2,3,4)$ 上的一条流线，满足

$$\forall s\in(-\infty,+\infty),\ \exists i\in[1,4],\ \partial\gamma(s)\times v_i(\gamma(s))=0$$

➢ **奇异点**：满足矢量 $\boldsymbol{u}(p)=0$ 的点

➢ 对每一个奇异点 p, 计算所有从 p 流出的流线，最终流线将区域分解为若干个子区域。

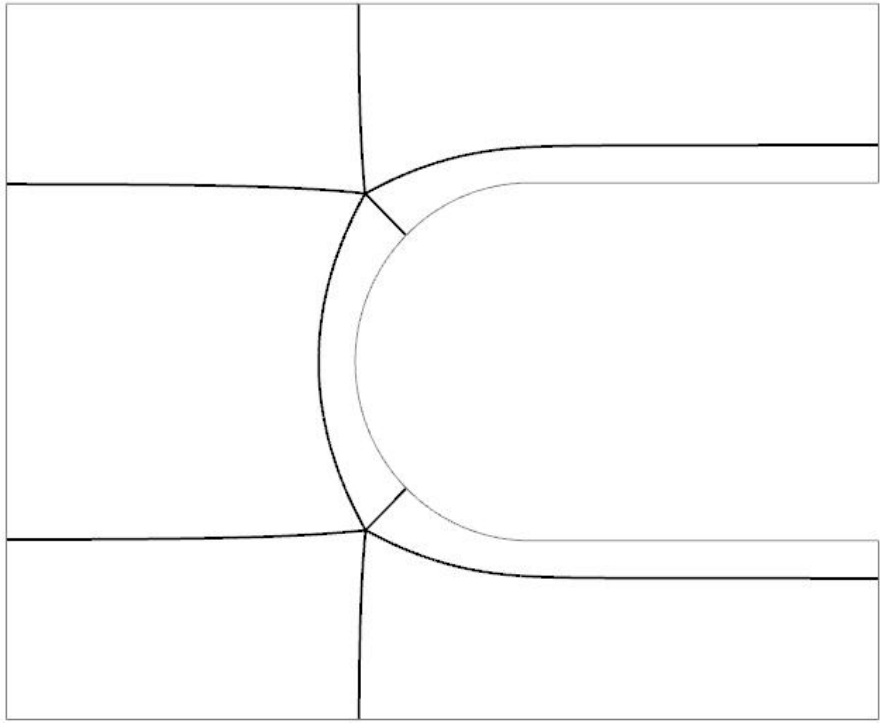


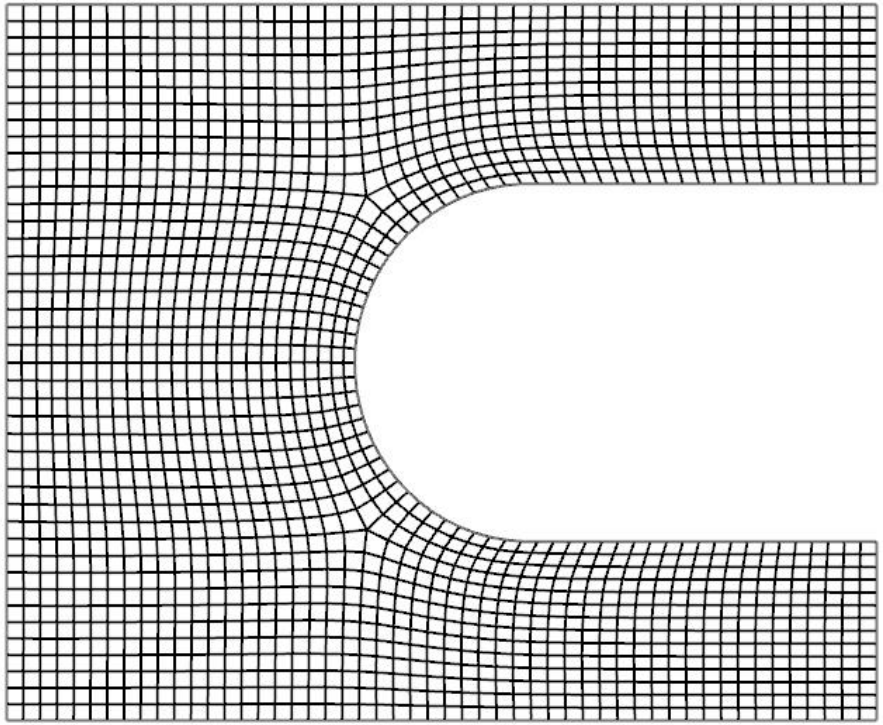


基于标架场的二维区域全自动四边形网格生成

- **结构化方法可用于生成每个子区域的网格**

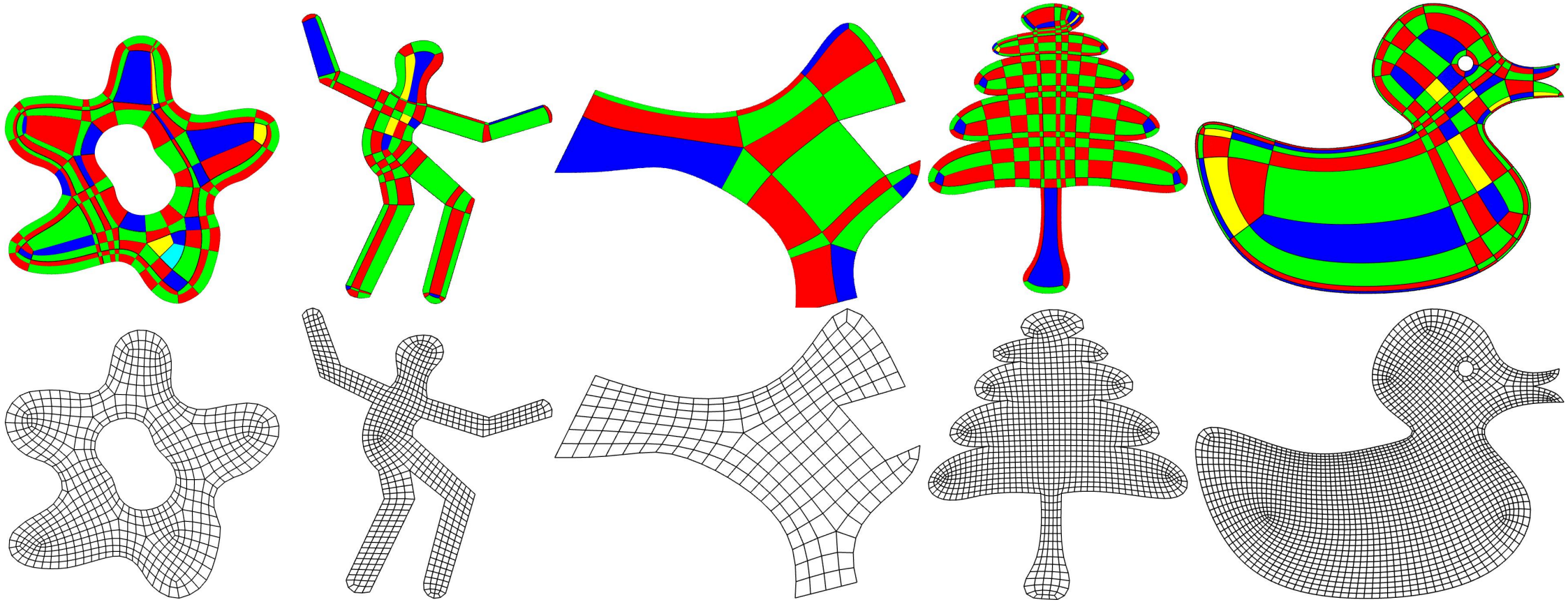
➢ 将整个区域分解为若干个四边形区域，采用超限插值方法生成每个子域的四边形网格





基于标架场的二维区域全自动四边形网格生成

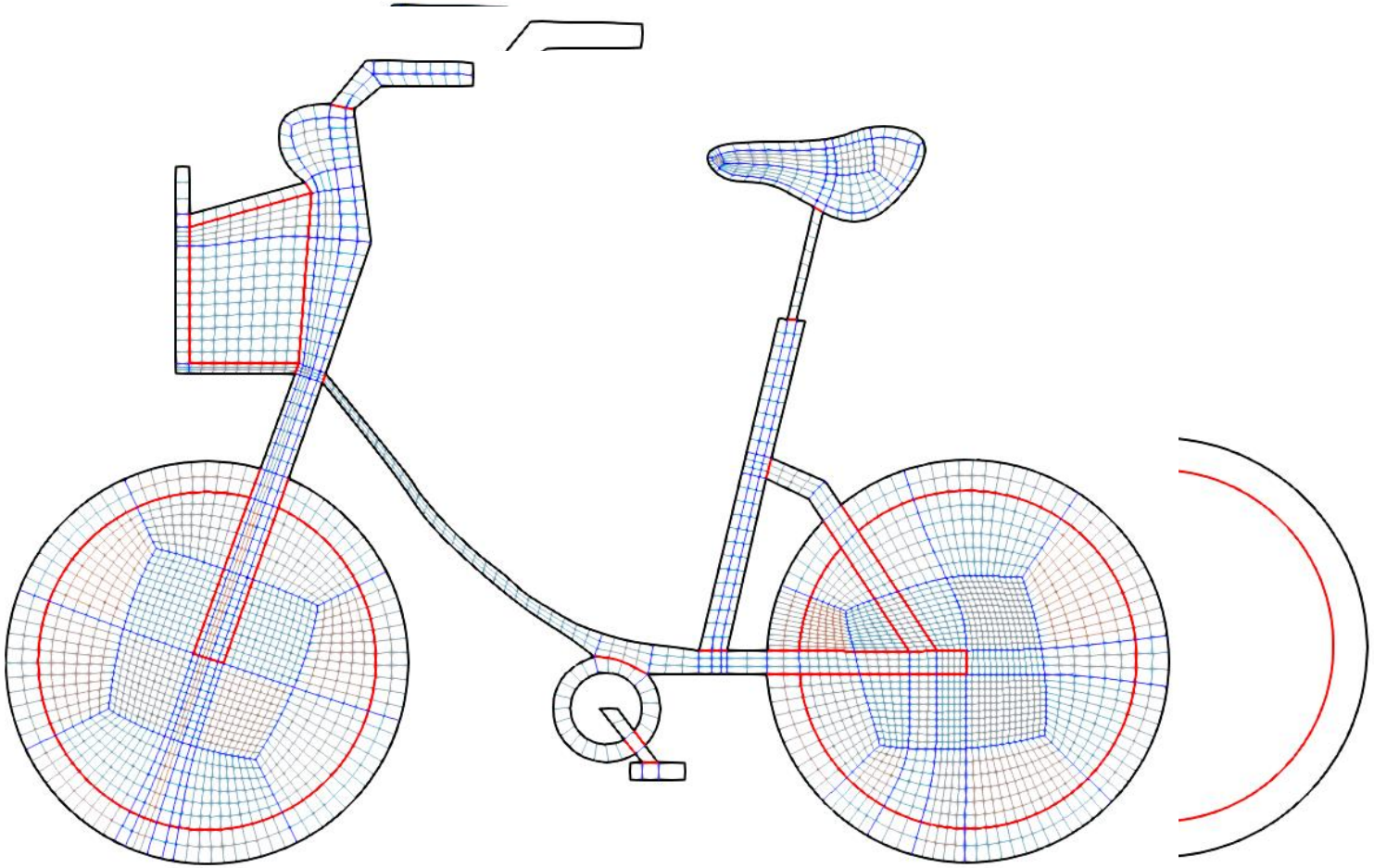
- 实验结果



基于标架场的多约束区域全自动分解

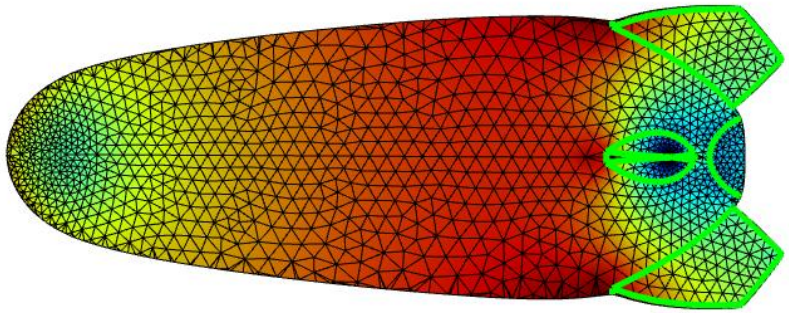
- **实验结果**

➢自行车模型



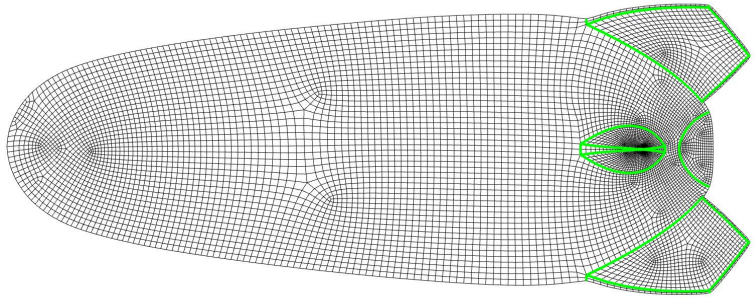
方法综述

- 输入：三角背景网格及对应的尺寸场约束信息
- 输出：满足多个约束的四边形网格



算法流程

- 提取尺寸场变化较大的等值线归并入约束线中
- 对边界，约束边及等值线进行标架约束
- 计算出针对多复杂约束的全局标架场及奇异点
- 根据标架场及奇异点划分出满足多复杂约束的拓扑划分
- 拓扑结构简化
- 使用模板网格生成算法在等值线附近使用模板插入生成网格



尺寸场等值线分割值计算

- 假设 $V=\{\mathrm{v}_i \mid i=1, \quad ,L\}$ 为背景网格的尺寸值集合，L 为顶点的个数。使用最大类间方差法可以得到寻找最佳尺寸分割值的公式：

$$\arg\min_{k=1}^{L} \quad \omega_1(\mu_1-\mu)^2+\omega_2(\mu_2-\mu)^2$$

$$\text{s.t.} \qquad \mu_1=\sum_{i=1}^{k} v_i / \mathrm{k}$$

$$\mu_2=\sum_{i=k+1}^{L} v_i /(L-k)$$

$$\mu=\sum_{i=1}^{L} v_i / L$$

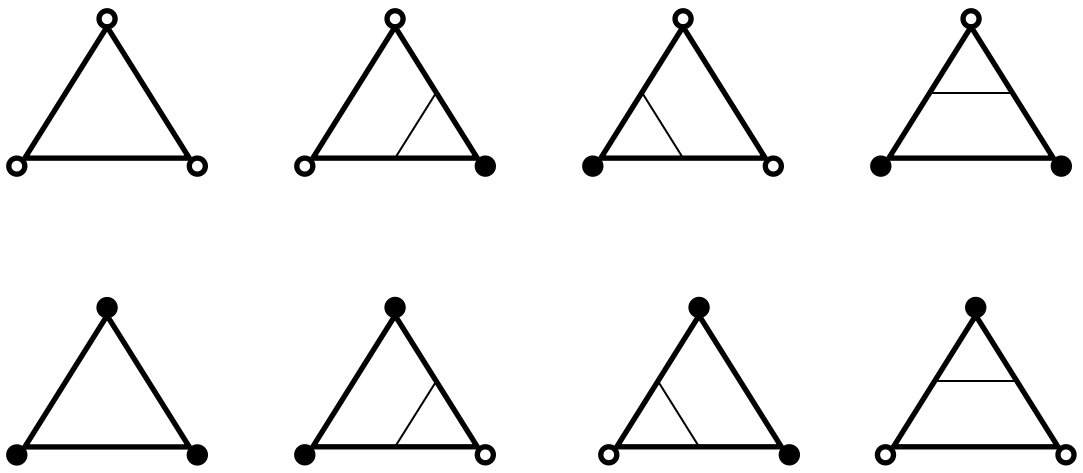
$$\omega_1=k / L$$

$$\omega_2=1-\omega_1$$

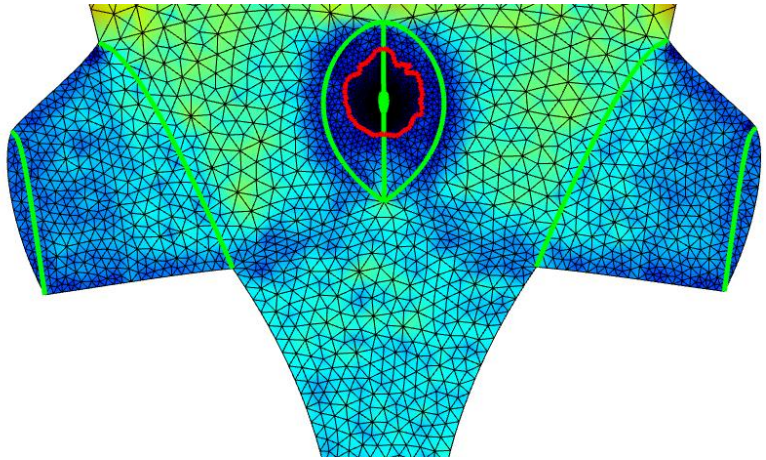
$\mu 1$为分割后小尺寸值的均值，$\mu 2$为分割后大尺寸值的均值，μ为所有尺寸值的均值，
ω1为分割后小尺寸值占据所有尺寸值的概率，ω2为分割后大尺寸值占据所有尺寸值的概率

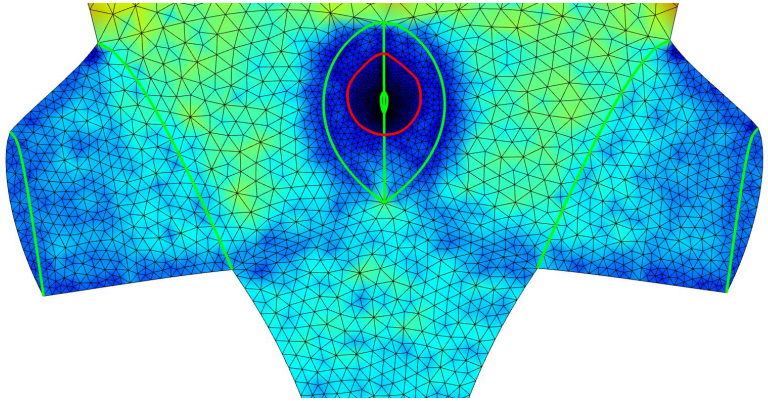
等值线寻找/光滑

- marching triangle法



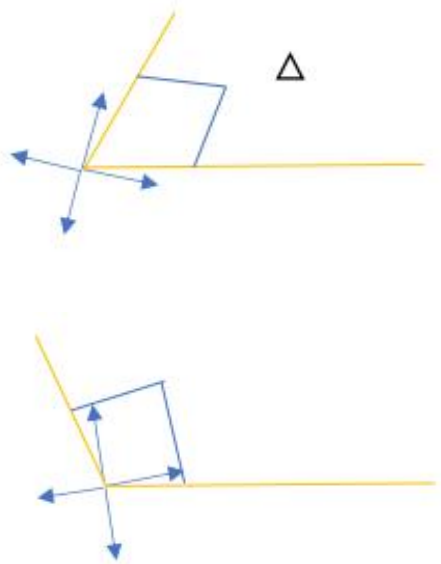
case1 case2 case3 case4



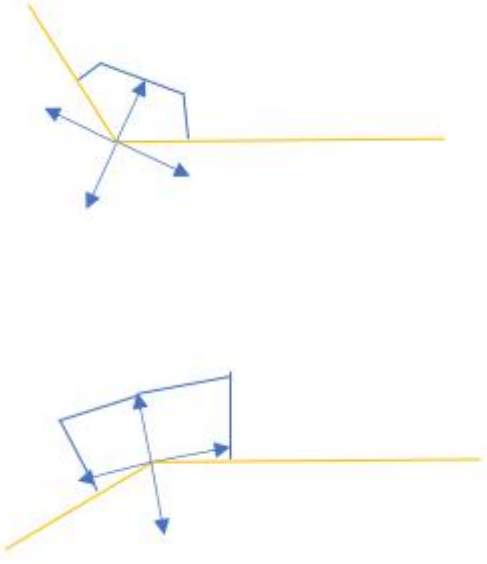


约束标架配置

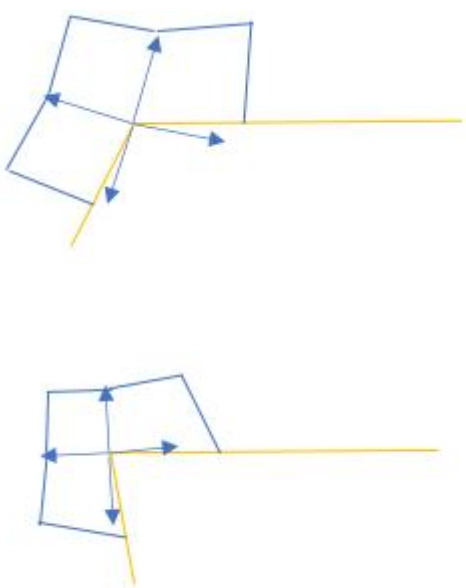
- 由于输入为带约束的三角网格，此处我们给出的所有特征/等值线边的标架配置方法，而不仅仅局限于边界的配置



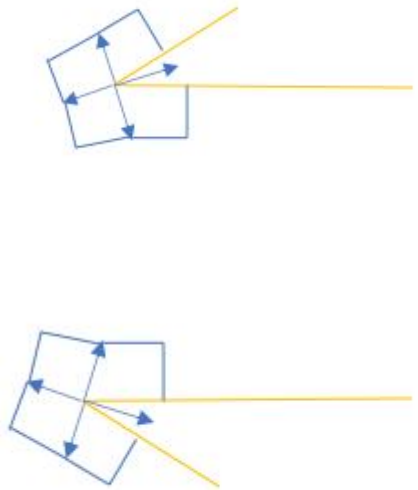
$\theta_{feature} \leq \theta < \pi - \theta_{feature}$



$\pi - \theta_{feature} \leq \theta < \pi + \theta_{feature}$



$\pi + \theta_{feature} \leq \theta < 2\pi - \theta_{feature}$



标架场计算

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 \mathrm{d}x, \\ \mathbf{u}(x) = \mathbf{u}_0(x) \quad \forall x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

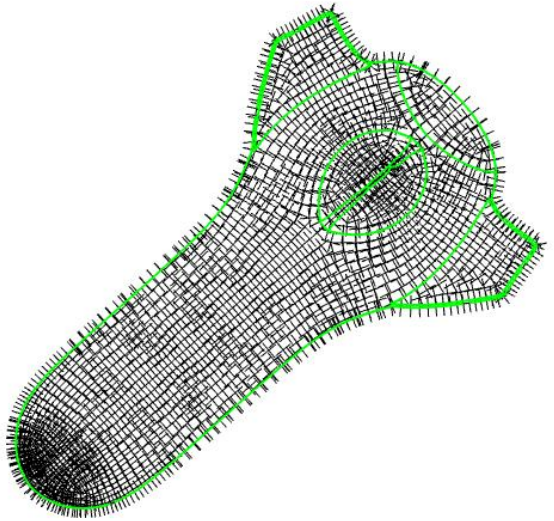
$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 \mathrm{d}x, \\ \mathbf{u}(x) = \mathbf{u}_0(x) \quad \forall x \in \partial\Omega, \\ |\mathbf{u}(x)| = 1 \quad \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

- 由于上式右式增加标架范数=1的限制后的方程为非线性方程，具体算法如下
- 1：首先解出左侧的线性系统方程，将得到的所有矢量单位化(在进行单位化后J(u)的能量在奇异点附近必然会上升，因此需要对此解再度优化)
- 2：对于第i次的解与第i+1次的迭代求解，我们加入线性约束

$$\mathbf{v}_{n+1,i} \cdot \mathbf{v}_{n,i} = 1.$$

目标为能量J的最小化，采用Lagrange乘子法将其转化为线性方程

$$M\begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix},$$



离散点量化

假定一条线应被分为ne段，设定一个曲线的参数化，满足

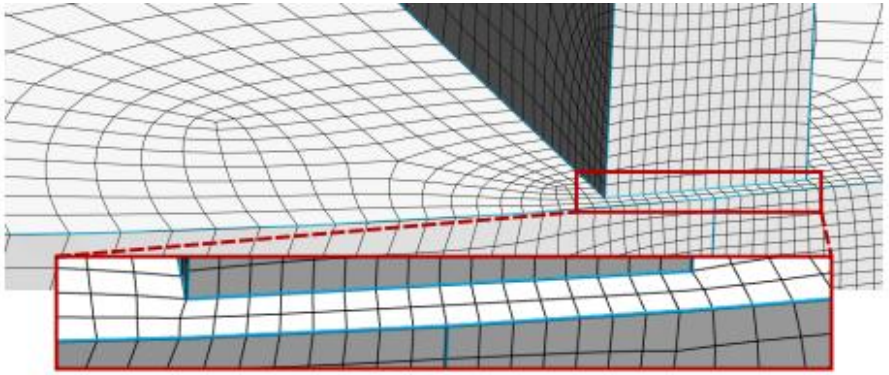
$$x_j = f(j)$$

区域线的与尺寸值对应的第 i 个点相关联的参数

$$\int_0^{t_i} \frac{dx}{s(x)} = \frac{i}{n_e} \int \frac{dl}{s(x)}$$

原先的只取平均可以看作参数计算为

$$\int_0^{t_i} dx = \frac{i}{n_e} \int dl$$

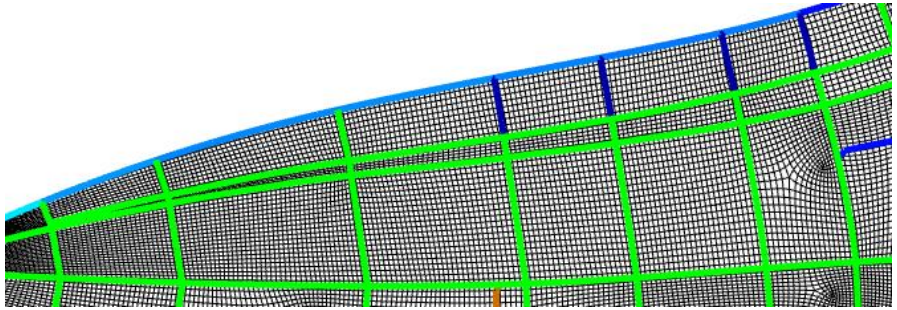


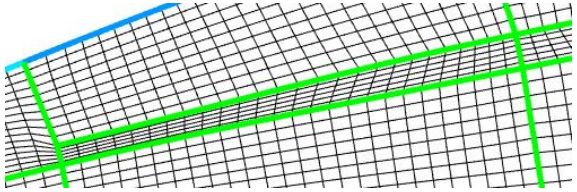
第i个点的坐标根据参数计算

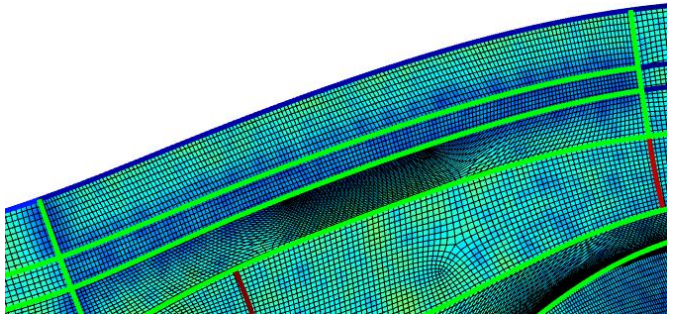
$$x_i = f(t_i)$$

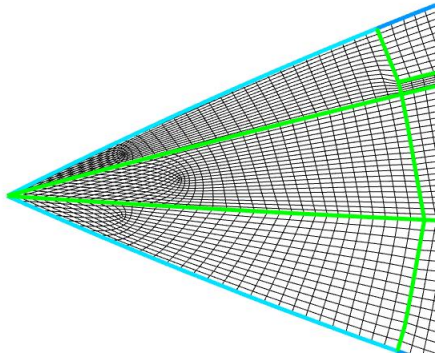
分段数计算

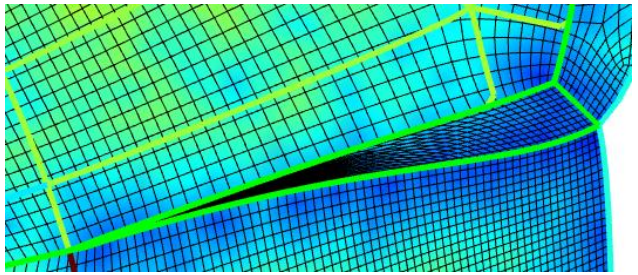
- 每个区域线计算了初始段数后，根据弦分配，计算所有弦的理想分段数，取平均，统一分段
- 段数约束：偏差设置0.25（段数差与最大段数比的阈值），超过阈值不认为这是对边弦



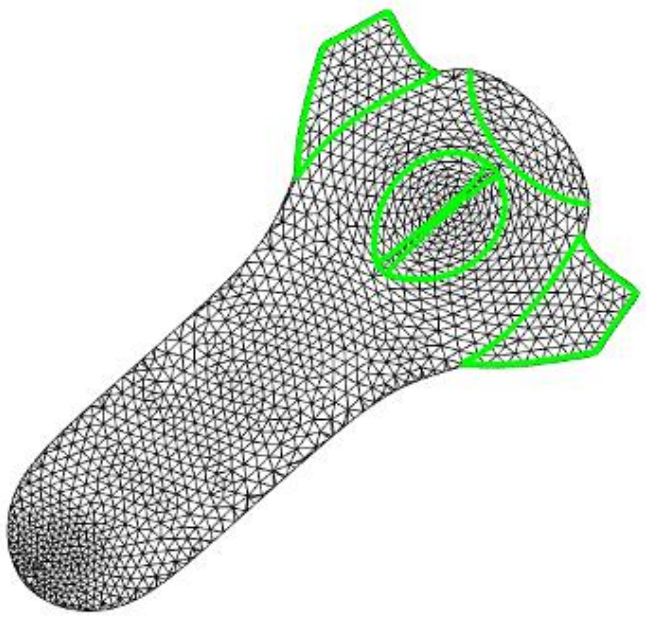


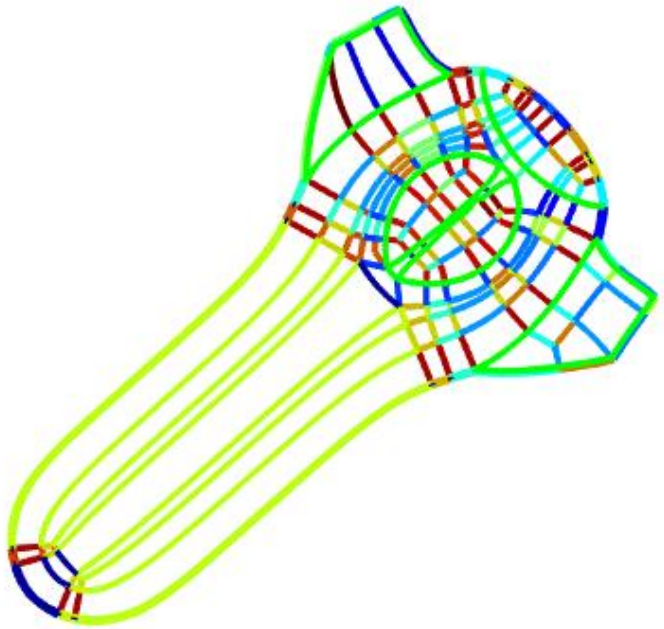


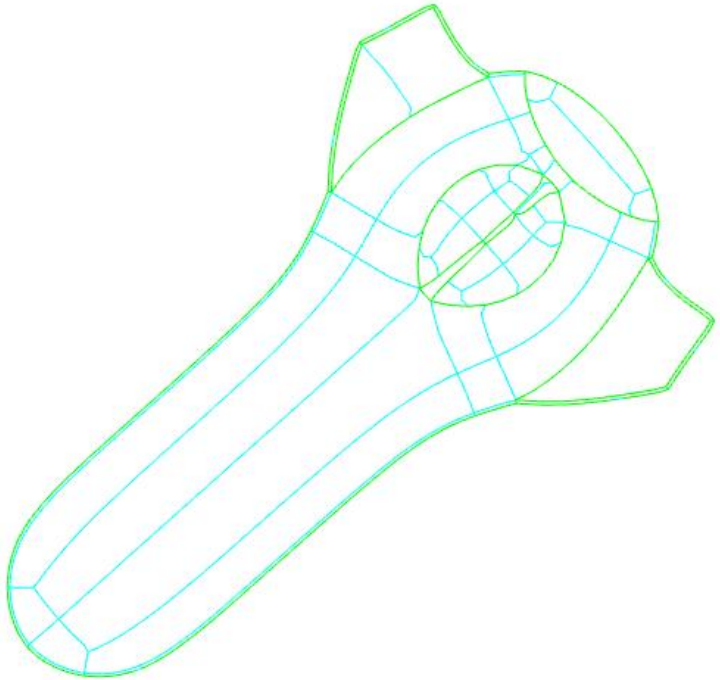




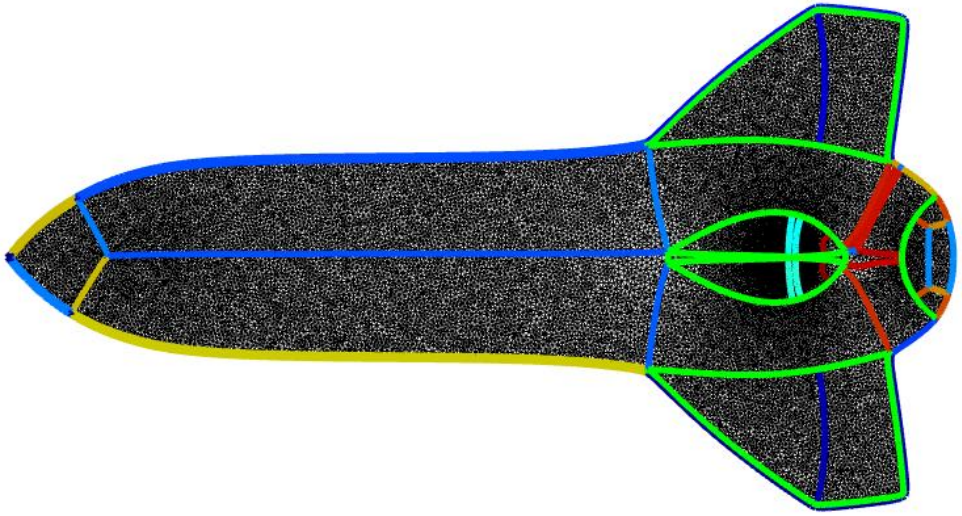
区域剖分对比

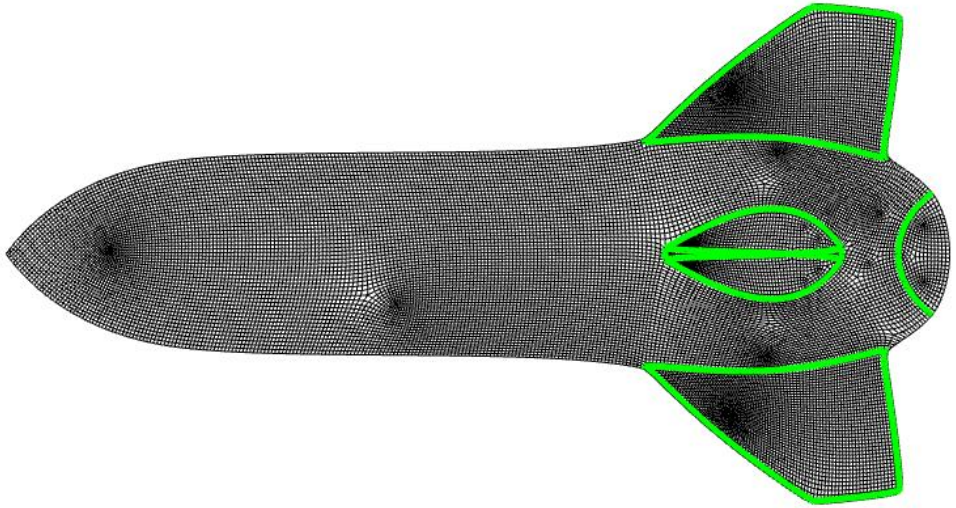


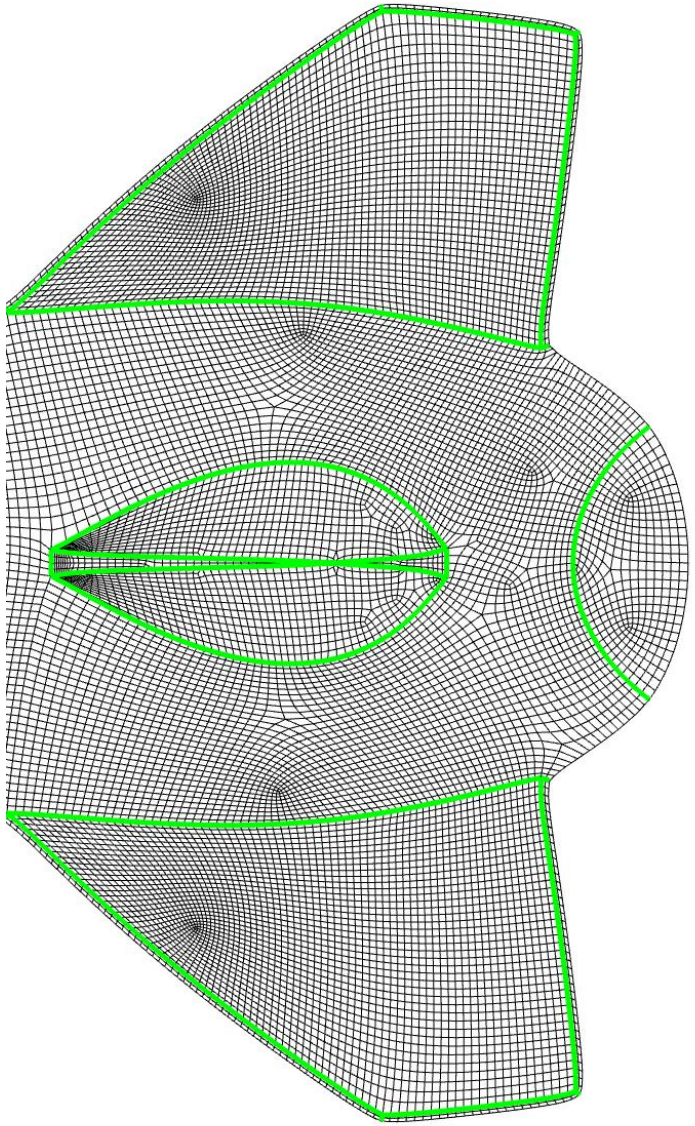


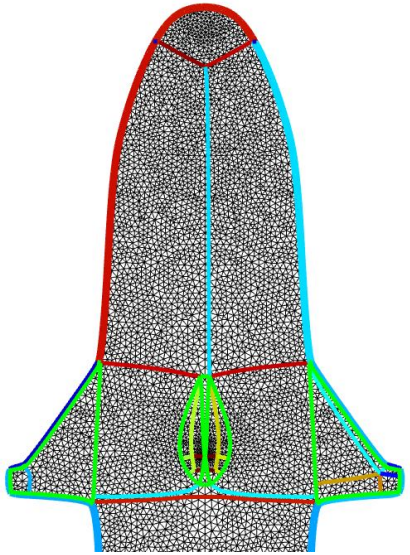


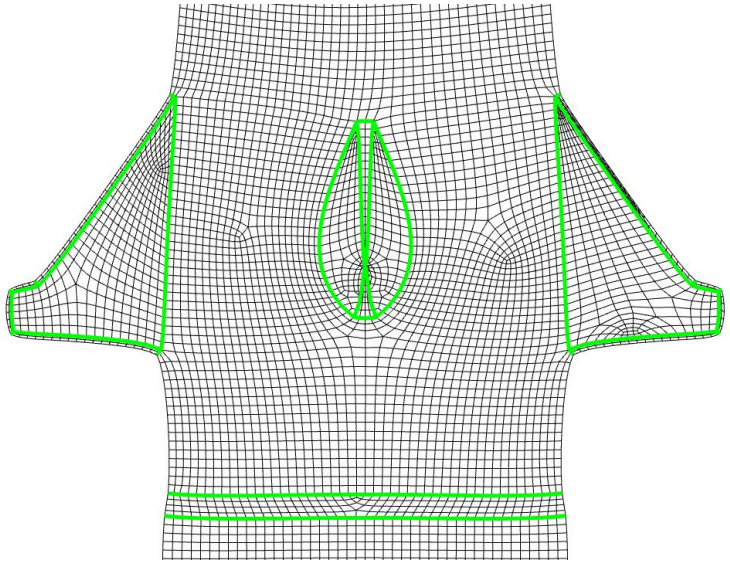
二维网格结果

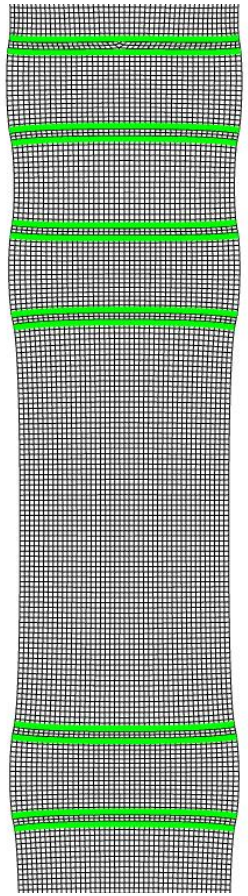


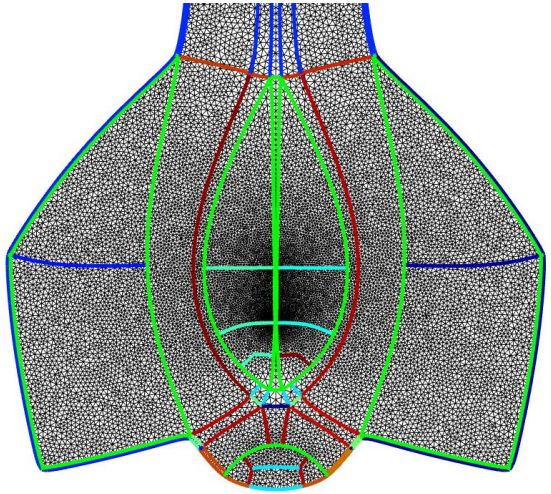


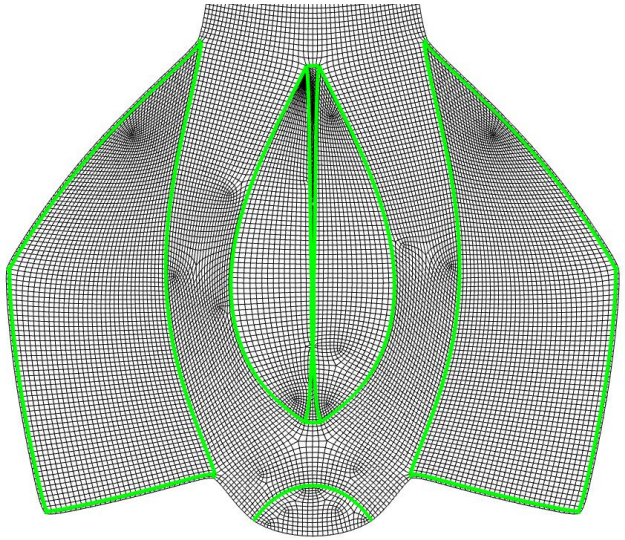




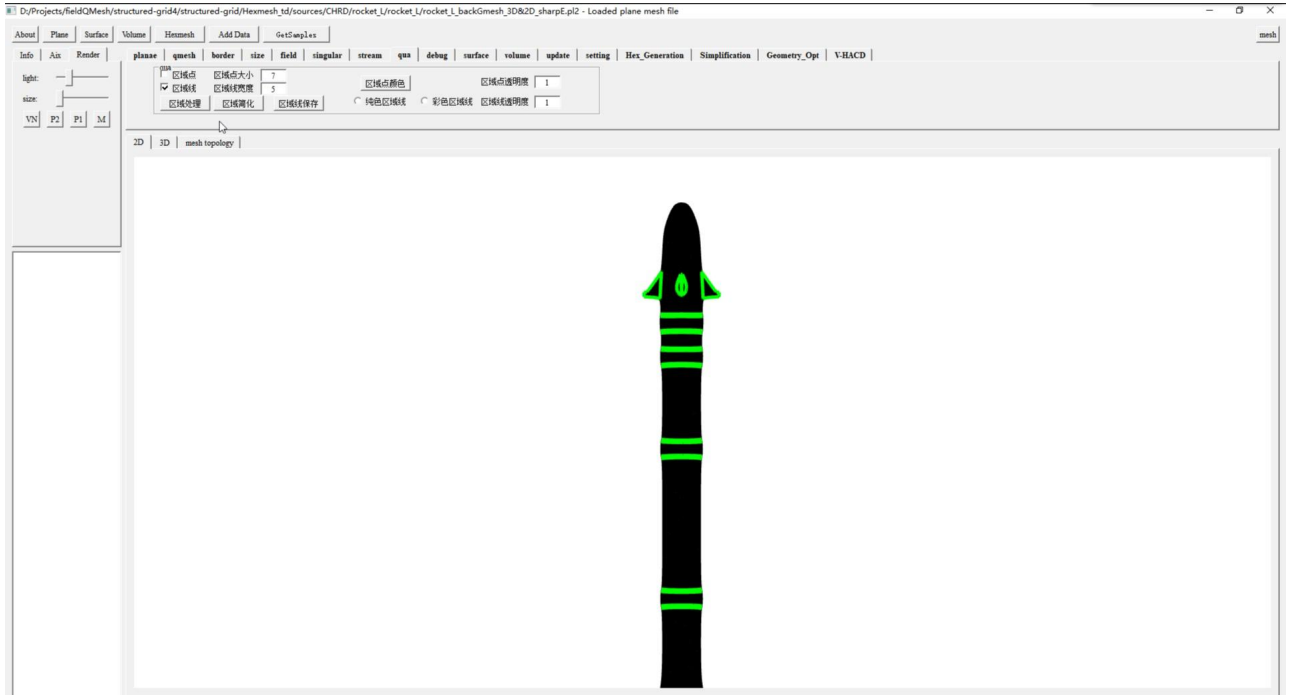


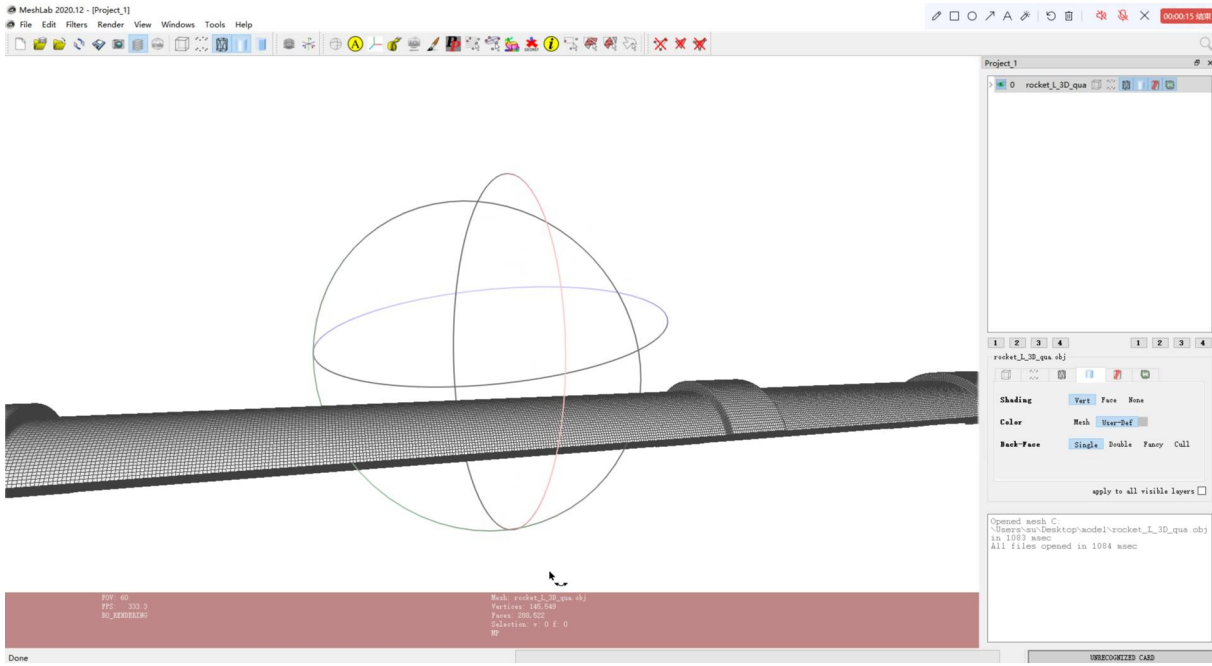




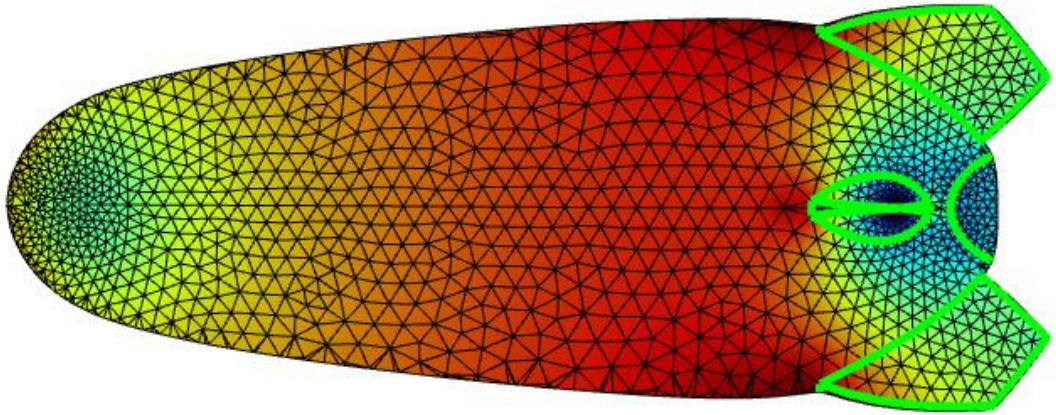


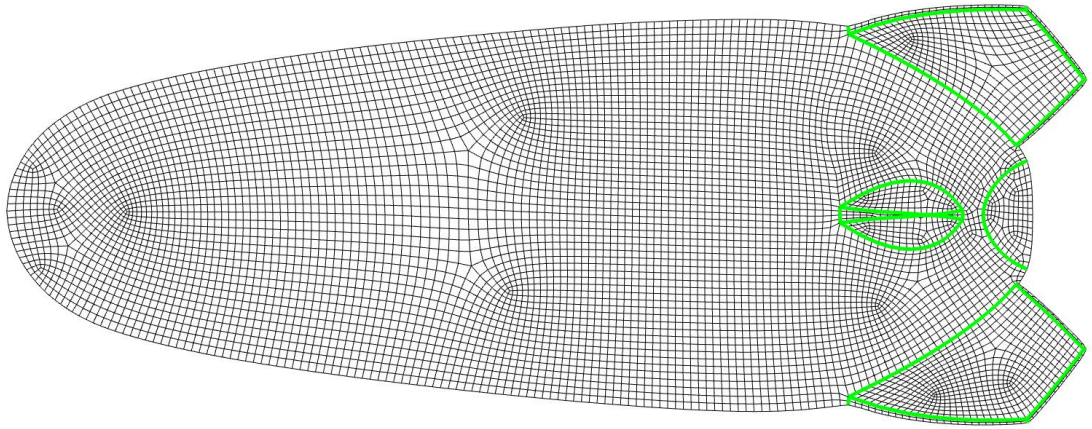
表面结构网格生成

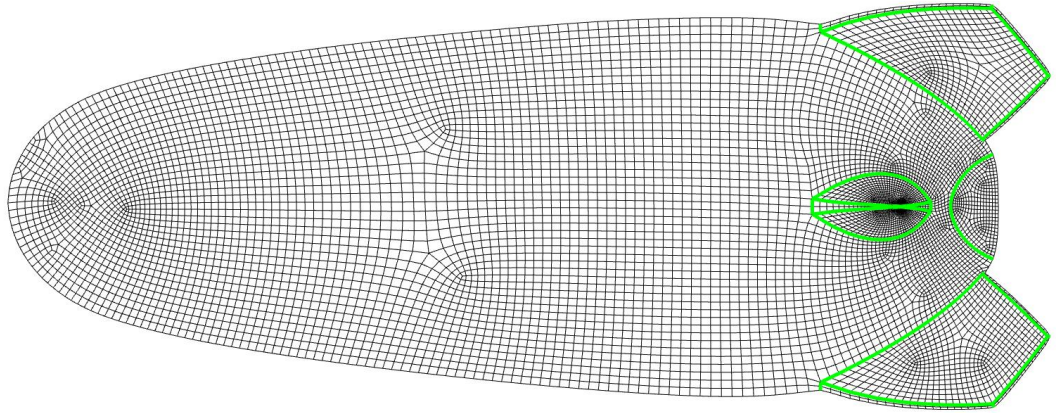

D:/Projects/fieldQMesh/structured-grid4/structured-grid/Hexmesh_td/sources/CHRD/rocket_L/rocket_L/rocket_L_backGmesh_3D&2D_sharpE.pl2 - Loaded plane mesh file
About
Plane
Surface
Volume
Hexmesh
Add Data
GetSamples
mesh
Info
Aix
Render
planae
qmesh
border
size
field
singular
stream
qua
debug
surface
volume
update
setting
Hex_Generation
Simplification
Geometry_Opt
V-HACD
light:
size:
VN
P2
P1
M
区域点
区域点大小
区域线
区域线宽度
区域处理
区域简化
区域线保存
区域点颜色
纯色区域线
彩色区域线
区域点透明度
区域线透明度
2D
3D
mesh topology


MeshLab 2020.12 - [Project_1]
File
Edit
Filters
Render
View
Windows
Tools
Help
Project_1
rocket_L_3D_qua
Shading
Vert
Face
None
Color
Mesh
User-Def
Back-Face
Single
Double
Fancy
Cull
apply to all visible layers
Done
UNRECOGNIZED CARD

二维网格结果

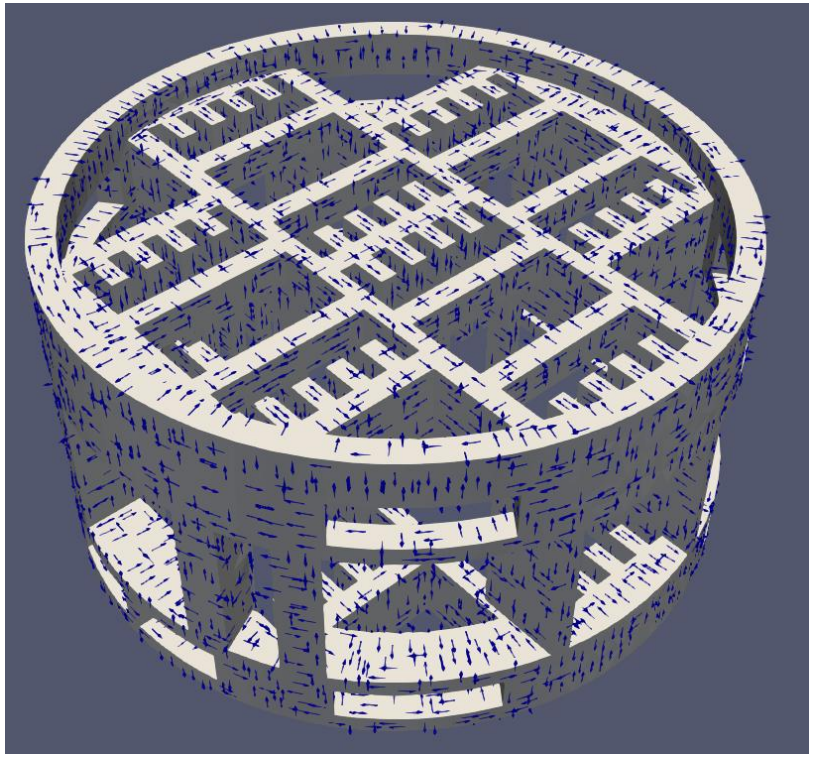




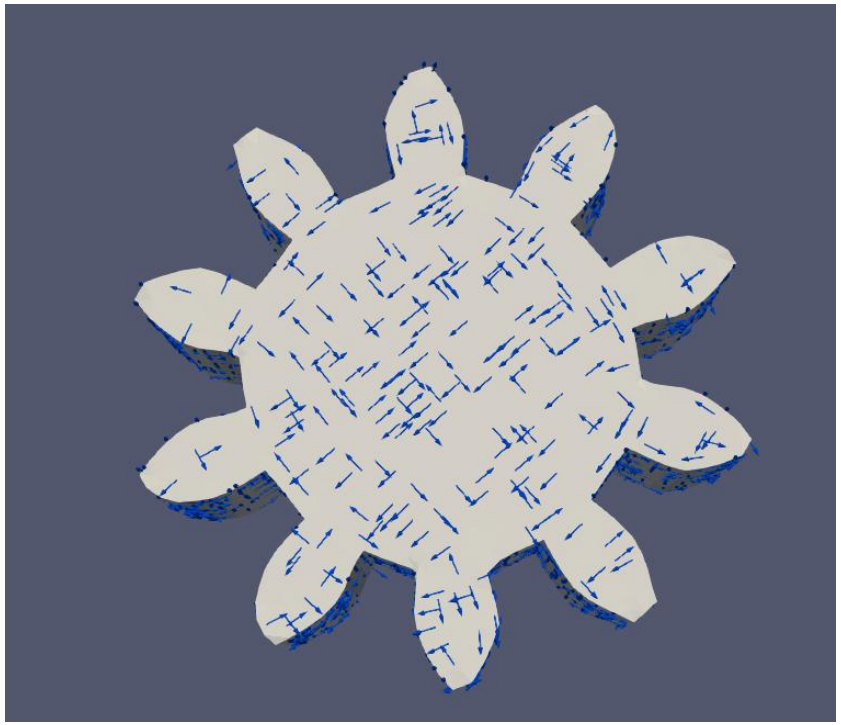


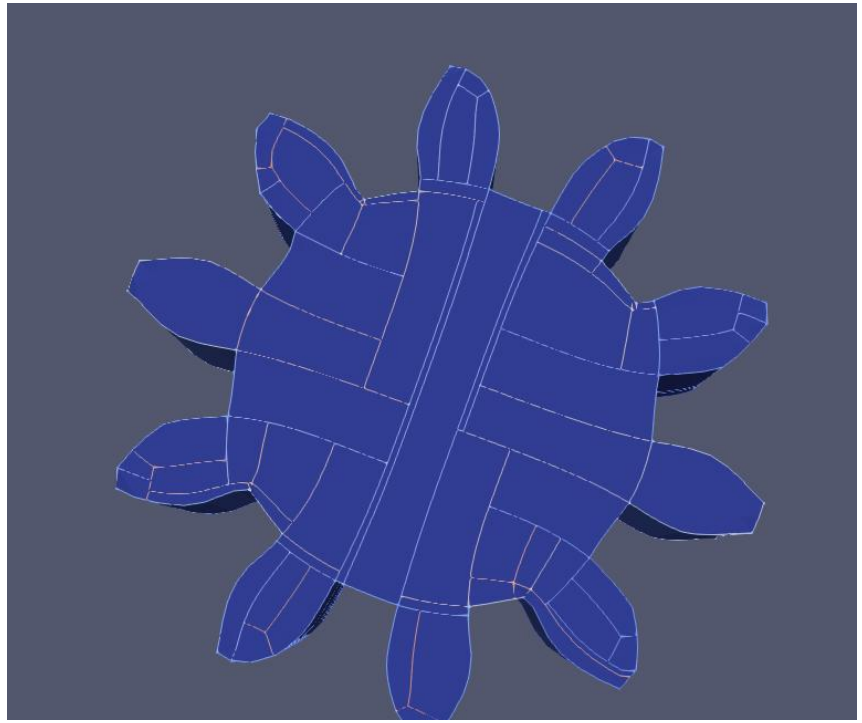
与二维框架的区别

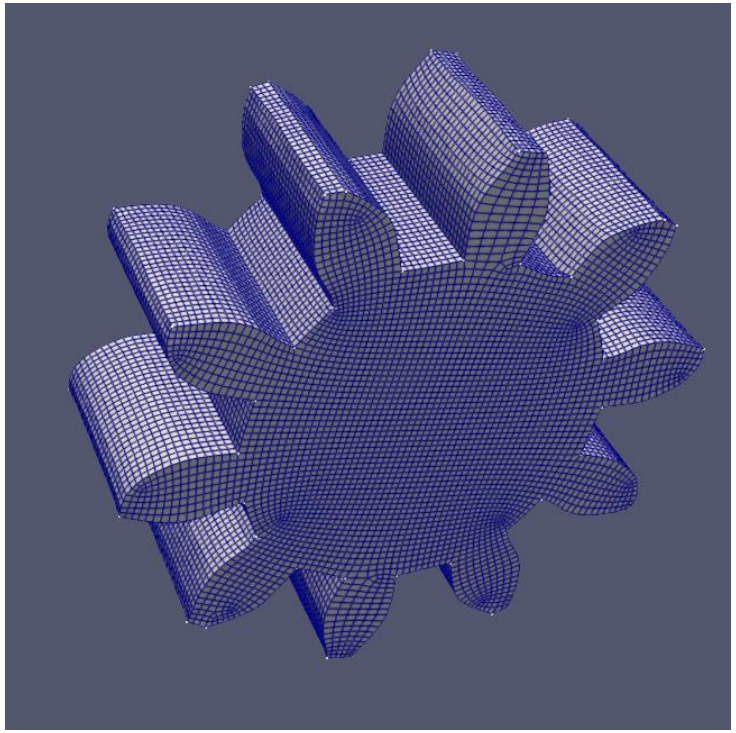
- 在三维表面直接进行标架场计算（类似于求解曲面上的PDE）
- 为保证鲁棒性及效率（避免流线求交），在流线延伸过程中进行重新网格化
- 通过全局整数规划来进行边界分段数计算



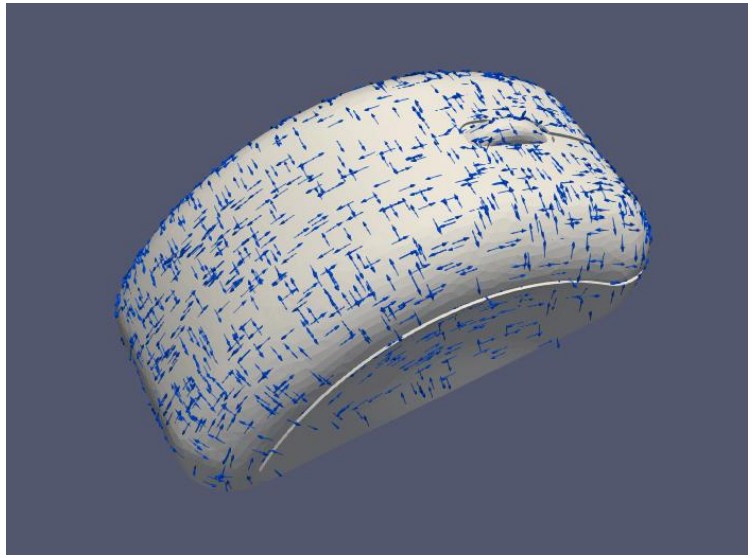
齿轮模型

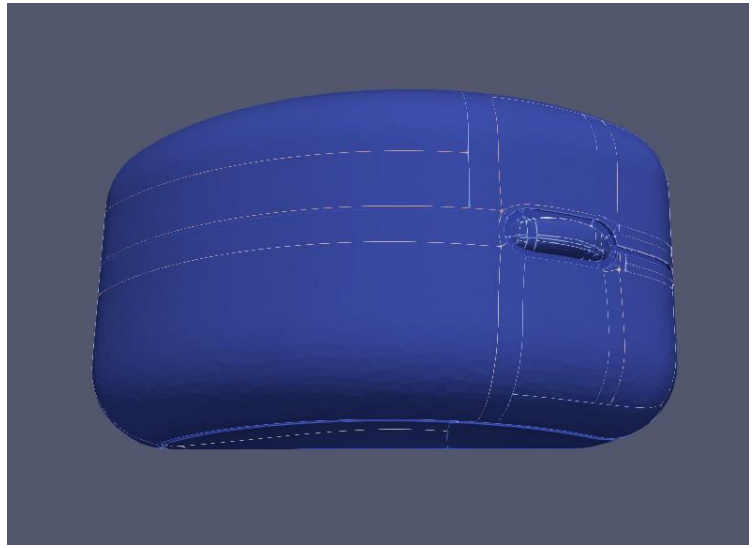


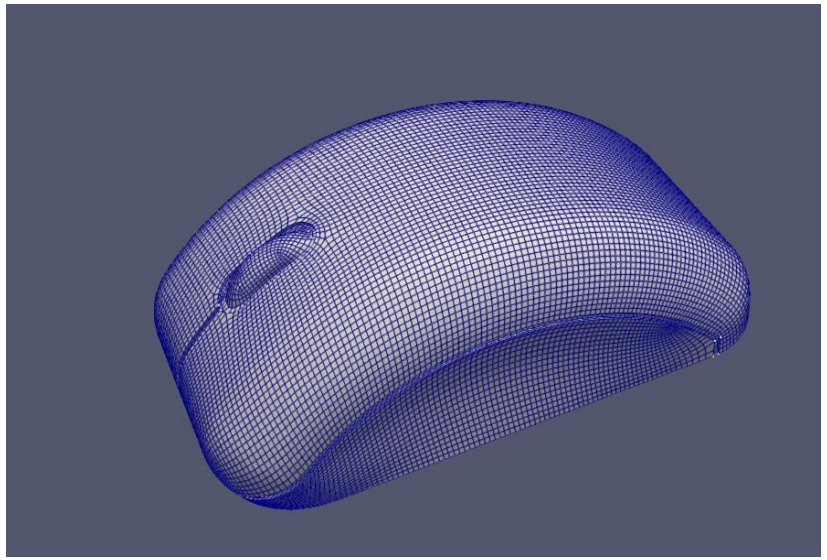




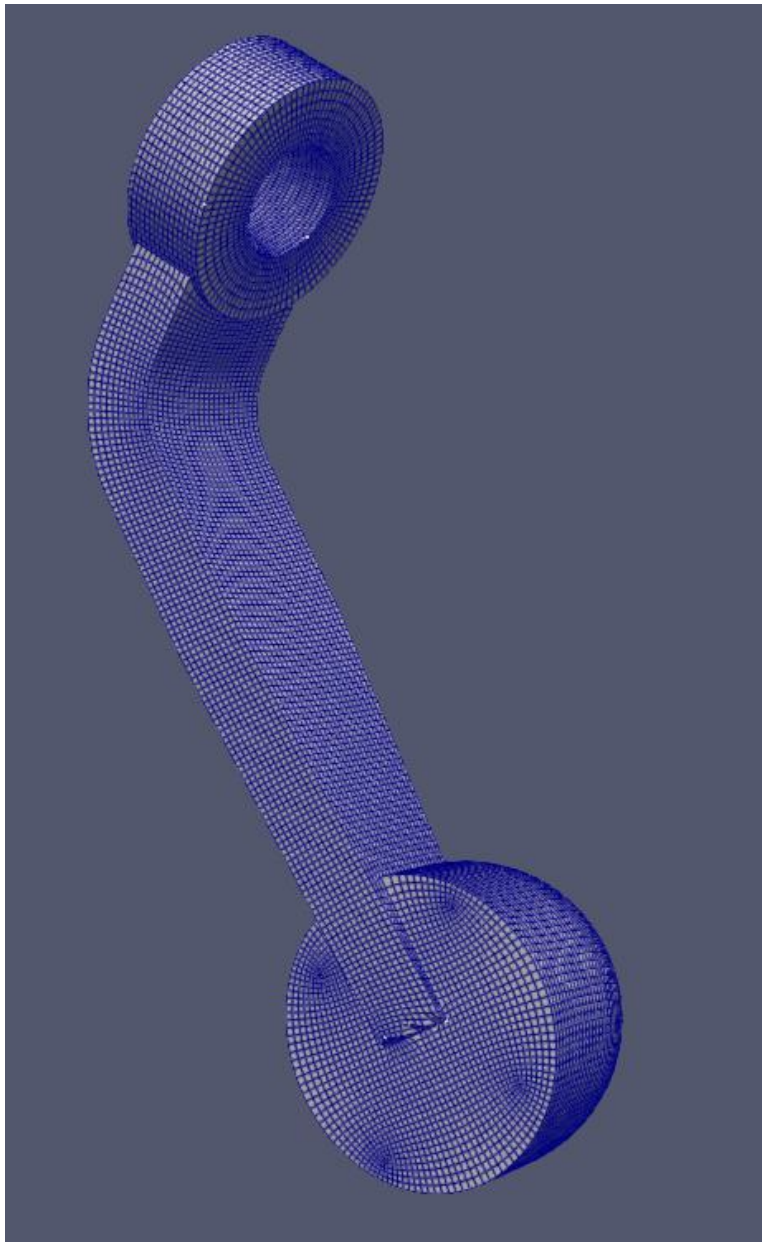
鼠标模型

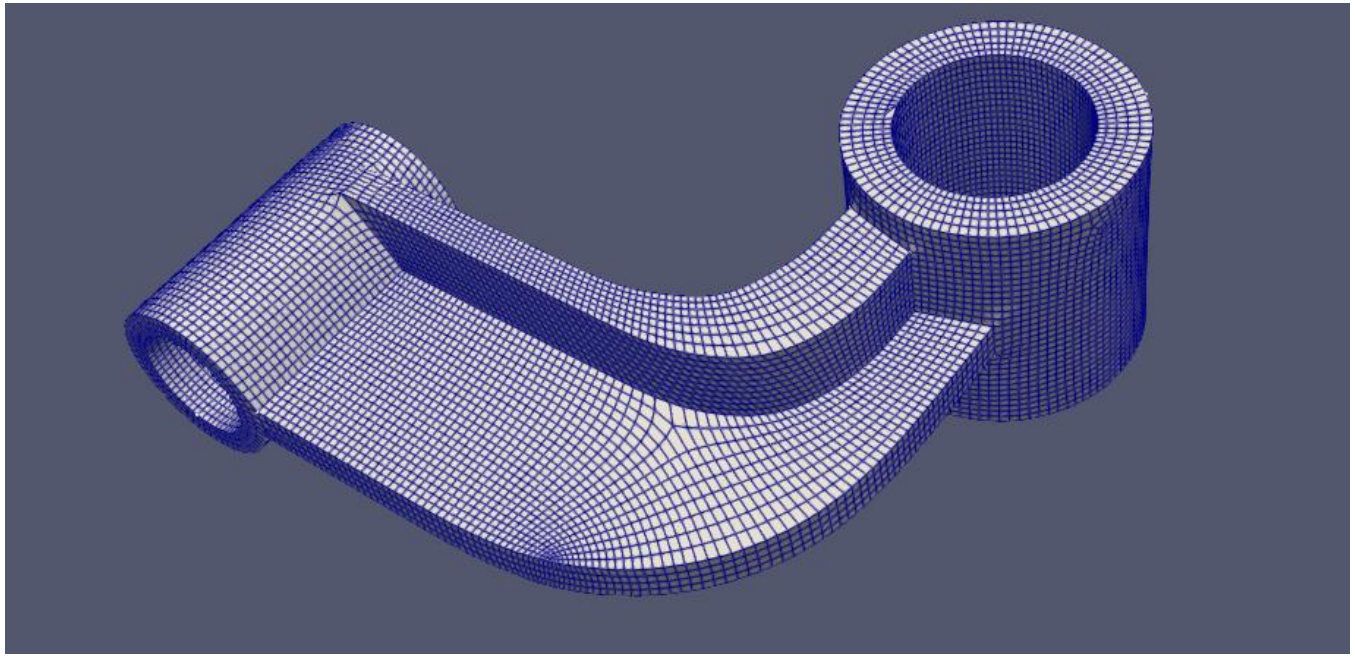




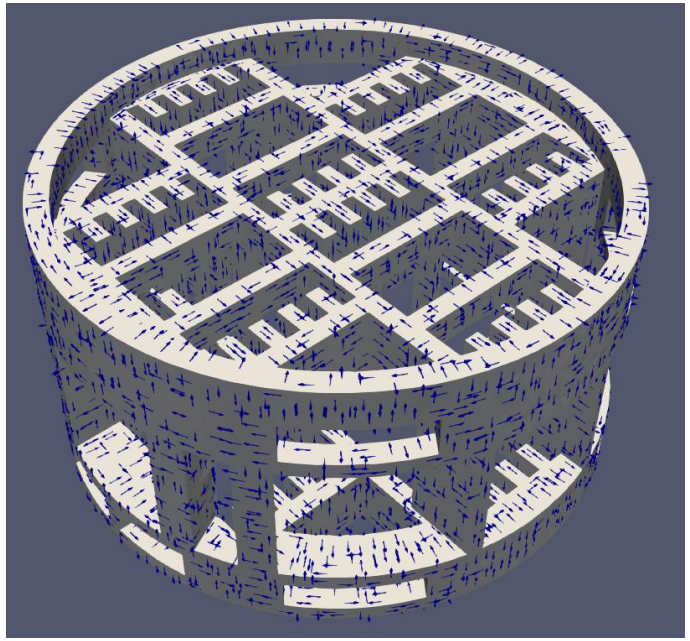


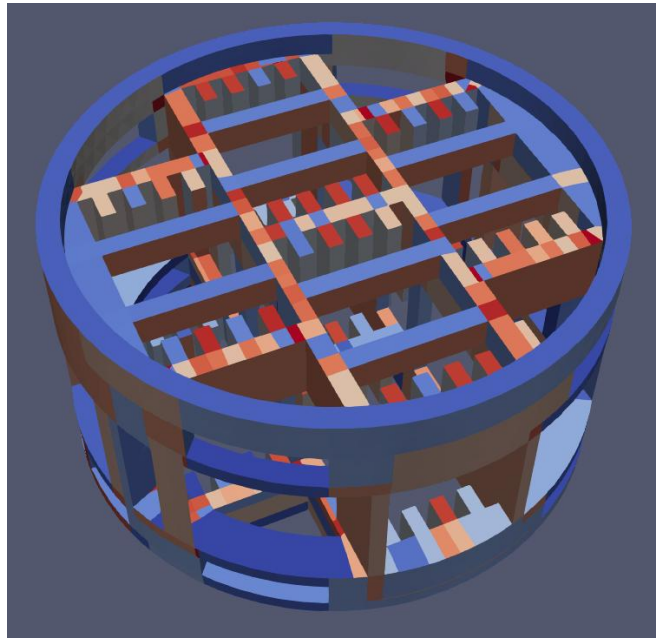
机械模型

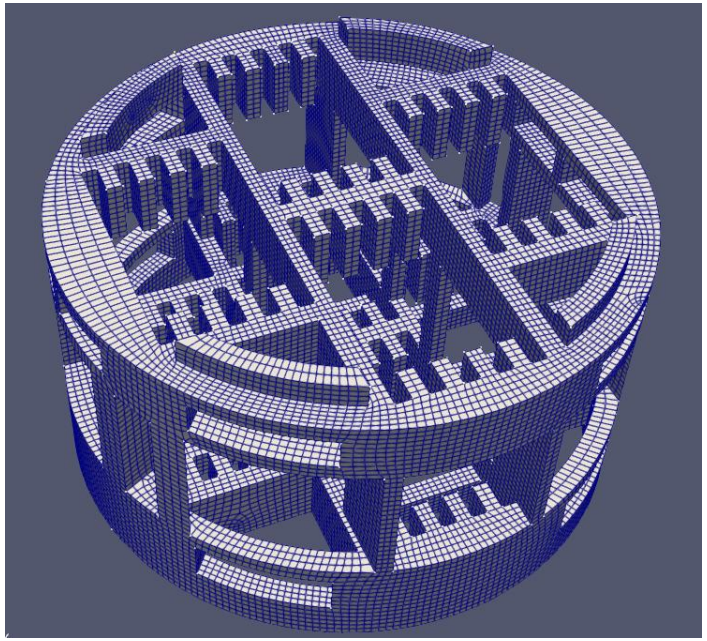




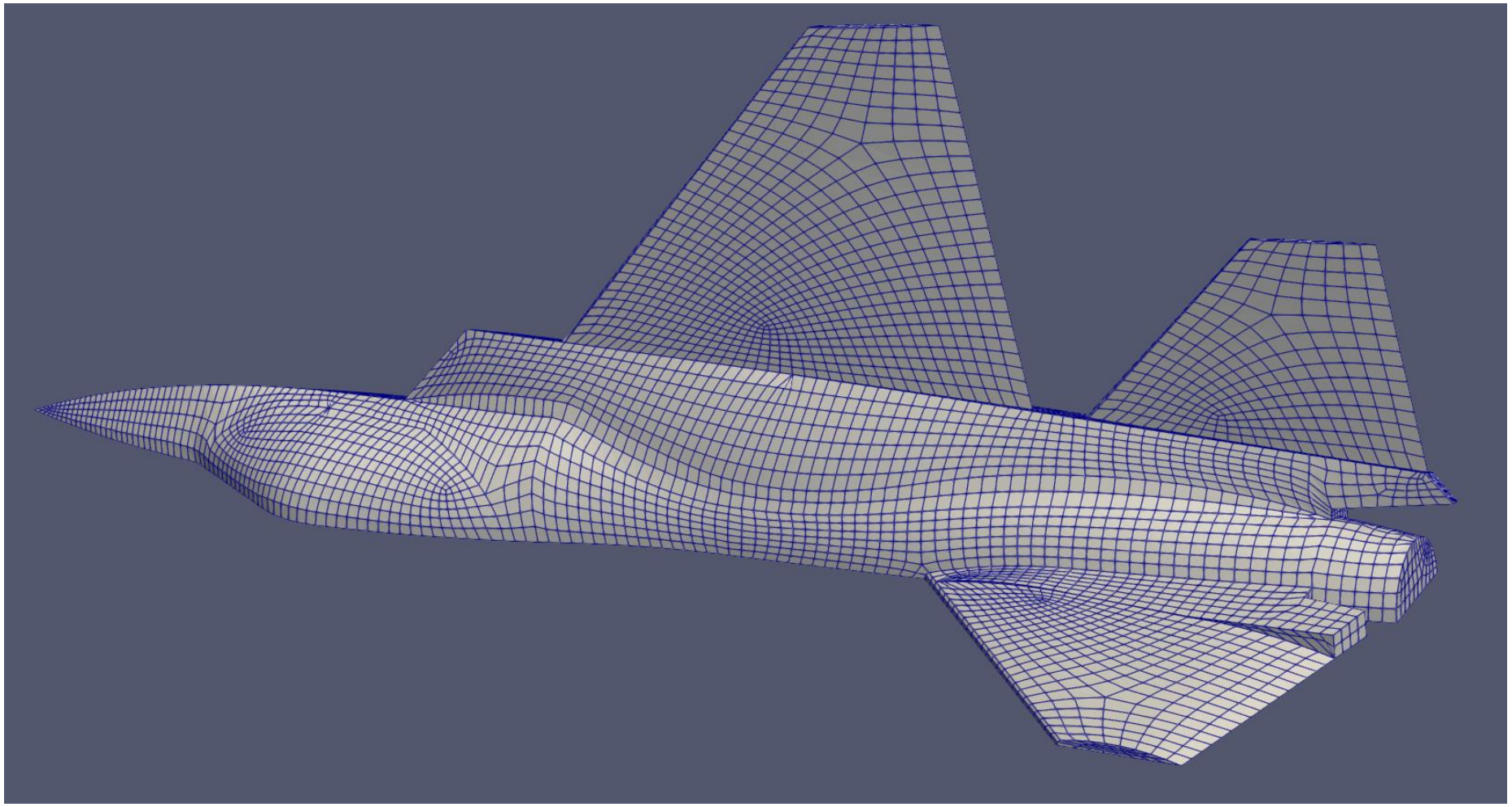
多亏格模型







飞行器模型



目 录

1. 有限元分析

1. 场问题的一般描述
2. 有限元法基本思想
3. 有限元法的基本步骤与相关概念
4. 有限元法的形成与发展
5. 有限元分析

2. 网格生成

1. 非结构化网格
2. 结构化网格

欢迎参加2023年网格生成及应用研讨会（7.14-7.16 大连）

智能可视建模与仿真实验室

Intelligent Visual Modeling & Simulation (iGame) Lab

Thank You !

Q & A